割合の問題解決における方略分析

栗山　和広

An analysis of Solution Strategies in Solving Ratio Problems

Kazuhiro KURIYAMA

Abstract

The purpose of this study was to examine the solution strategies in solving ratio word problems. Thirty-three sixth graders solved three problems of ratio concepts. Three ratio word problems composed of the first term of proportion (p = a ÷ b；p: proportion, a: quantity to be compared, b: base quantity), the second term of proportion (b × p = a), the third term of proportion (b = a ÷ p). After solving the ratio word problems, students were interviewed individually. Seven kinds of solution strategies were found: computational strategy, estimation strategy, metacognition strategy, division strategy, inexplicable strategy, figure strategy, and multiple strategy. Students used metacognition and division strategy that students invented, rather than the computational strategy that were instructed in school. This suggested that children utilized not mathematical rule but informal strategies which students invented. These results were discussed in terms of the viewpoint of new curriculum based on informal knowledge that students have themselves.

Key words：ratio problems , mathematical rule , informal knowledge , strategies
キーワード：割合、数学的公式、インフォーマルな知識、方略
2006. 1 .18 受理

子どもの学力が低下しているという議論が最近のマスコミを騒がしている。そうした報道では、それぞれの教育関係者が学力低下について指摘している。刈谷ら(2002)は、12年の期間をおいた中学生と小学生の算数・数学と国語の調査において学力の低下を見いだしており、その中でも特に小学生の算数の学力低下が著しいことを指摘している。

本研究は、さまざまな調査が指摘しているところの小学校算数の学習の中で、子どもにとって理解することが困難であり、また教師にとっても指導することが難しいといわれている割合概念をとりあげて、その困難性の要因について検討する。

割合は、小数、分数、比例といった有理数の下位概念の１つであり、中学校で学習する有理数へとつながっていく重要な概念である。しかし、これを理解しにくい概念と考えている子どもは多い。高校生になっても割合の文章問題を正しく理解しているとはいえない生徒がいるということは、さまざまな調査が指摘しているところである。

認知心理学的な視点から、小数、分数、比例といった概念に関しては多くの研究がなされてきている。例えば、分数の大小関係の理解の困難性についての研究（Smith, 1995；吉田・栗山，1991；Yoshida & Kuriyama, 1995）や、小数の大小関係の理解についての研究（Hiebert, 1992；栗山・吉田，2000；Resnick et al., 1989）や、比例についての研究（Singer & Resnick, 1992）が行われるようになっている。そこでは、そうした概念の学習中の障害は何かをかなり明らかにしつつある。

九州保健福祉大学社会福祉学部臨床福祉学科　〒882-8508　宮崎県延岡市吉野町1714－1
Department of Clinical Welfare Service, School of Social Welfare, Kyushu University of Health and Welfare
1714-1 Yoshino-cho, Nobeoka, Miyazaki Pref., 〒882-8508

このように認知心理学のアプローチから、分数や比例や濃度に関する研究は多く見られる。しかし、割合に関する認知心理学の視点からの研究は、これまであまり検討されてこなかった。これまでの研究では、割合概念を数学的構造性から検討したものがほとんどであった(Nunes & Bryant, 1996; Smart, 1980；深海, 1985)。そこでは、実践的な考えや歴史的視点から研究されたもので、心理学的視点から分析したものではなかった。外国においても、認知心理学からの割合概念の困難性に関する研究はほとんどみられない。

認知心理学的な視点からの割合概念についての研究は、河野・吉田（1999）や吉田・河野（1999）が検討を行っている。河野・吉田（1999）は、割合を学習する以前の小学4年生と5年生がもつインフォーマルな知識について分析している。材料としては、「%」についての直接経験の程度を調べる問題や、分離量が与えられたときの割合の量を調べる問題、割引になった%をもとに値段の大小比較ができるかという問題が出題された。その結果、7割を超える子どもが日常生活の中での割合の基本的な意味を理解しており、さらに割合の量についての問題でも5割を超える子どもが量的な表象を理解していることが見いだされた。このことは、割合を学習する前の子どもでも、割合に関するインフォーマル知識を獲得していることを示唆している。

また、栗山（2005）は、割合を学習するなかで何が理解の障害になっているかについて検討している。割合は、割合＝比べる量÷基にする量として公式化されており、これは第1用法と呼ばれている。第2用法と第3用法はこれを変形して得られる。比べる量＝基にする量×割合が第2用法で、基にする量＝比べる量÷割合が第3用法である。彼は、子どもが割合を正しく解決することが困難な理由として、割合で用いられる基にする量と比べる量の要素を子どもが正確に同定することが困難であることを示唆した。同様に、吉田・河野（1999）も割合における構成要素を同定することの困難さを指摘している。

本研究では、子どもの発話を求めるプロトコル分析から、子どもが割合の解決において用いる方略を分析し、割合概念の困難性の要因について明らかにすることが目的である。割合の解決におけるプロトコル分析を行うことにより、実際に子どもが自然に頭の中で解決する過程がより明らかになると考えられる。

方　法

被験児　延岡市近郊の公立小学校の6年生33名が、対象者である。彼らは5年生で割合概念を学習して4ヵ月ほど経過している。彼らは延岡市近郊の平均的な中流家庭の子どもである。

材料　割合概念を構成するテストの内容は、以下の通りであった。（1）小数を%で表す問題2題、%を小数に表す変換課題の問題が2題、（2）第1用法、第2用法、第3用法の問題がそれぞれ1題であった。

（1）「小数は百分率で、百分率は小数で表しなさい。

①0.24（　　　）　②1.025（　　　　）

③18%（　　　）　④106%（　　　　）

（2）3用法の問題：これらは5年生の算数の教科書にのっている問題である。

①第1用法：「35人のクラスで7人が宿題をやっていません。宿題をやっていない人は、クラス全体の何%でしょう。」

②第2用法：「40人のクラスのうち、35%が虫歯を持っています。虫歯の人は何人でしょう。」

③第3用法は：「陽子さんの家には、花壇があります。花壇の面積は6㎡です。これは庭全体の30%になります。庭全体の面積は何㎡でしょう。」

手続き　実験は個人面接で行われた。面接は6月に3週間かけて実施された。昼休み時間に、教室から子どもが1人ずつ面接者によって学校内の使われていない教室に連れて来られた。「名前は何ですか。好きな科目は何ですか」といった教示で話しやすい雰囲気をつくった後、子どもに次のような教示を行った「今から割合の問題を解いてもらいます。これはテストではないので、問題を解けても解けない場合でも、心配しないで答えてください。問題を解くさいに、問題の解き方を用紙に記入してください。解き方を消しゴムで消さないでください。」子どもにより問題の提示順序はランダムに変えられた。面接者は、問題用紙を提示して、子どもが問題を解く様子を全てＶＴＲに録画した。これらの分析終了後に、各クラスの担任教師に分析結果を報告した。

尚、割合は5年生の3学期に学習する内容で、単元内容は次のようであった。最初に、割合は、1つの量がもう1つの量の何倍になるかを考えて、2つの量の大きさを比べるという定義がなされる。その後、小数倍の割合を求める公式として、割合＝比べる量÷基にする量（第1用法）が指導される。次に、比べる量＝基にする量×割合（第2用法）が指導され、基にする量＝比べる量÷割合（第3用法）が指導された。小数倍の指導の後に、百分率が導入される。百分率はいつでも小数倍に変換できるし、また小数は百分率に変換できることが指導される。そして、百分率としての割合で第1用法、第2用法、

第３用法が公式を用いて指導される。

結　果

小数倍と百分率の変換問題

それぞれの問題の平均正答率は、(問題① 0.24（　）) で、82%、(問題②（1.025)) で 62%、(問題③（18%)) で 79%、(問題④（106%)) で 76%であった。問題②を除いて、いずれも 70%をこえる正答率である。こうしたルーティン的な割合問題は子どもにとっては容易であるといえる。

３用法の問題

１．正答率の分析

第２用法の正答率が 57%と最も高く、次に第３用法が 30%と中間で、第１用法が 27%ともっとも低かった。栗山（2005）は、第２用法、第１用法、第３用法と正答率が低下することを見いだした。この傾向と本調査結果とは少し異なるが、第２用法が最もやさしいということとは同じ傾向にある。割合概念を学習して４ヵ月経過すると、最も正答率の高い第２用法の問題でさえも正答率は 57%であり、高い正答率とはいえない。第１用法や第３用法の問題の正答率に至っては３割にも満たない極めて低い正答率である。このことは、多くの子どもが割合概念の解決に困難さをもっていることを示している。

２．プロトコル分析

ＶＴＲに録画した面接時の子どもの解決方法をプロトコル化した。プロトコル化から、子どもが用いた方略が同定された。その方略は主に７つに分類された。第１の方略は、割合の公式を用いたものである（Ｕ方略とする）。例えば、ある子どもは次のように述べている「基にする量、比べる量、割合があるから公式にあてはめて計算しました」。第２の方略は、答えをある程度予想し、その予想にあうように計算をするものである（Ｅ方略とする）。例えば、第３用法で「(問題を何回も見なおして）６平方メートルが 30%だから、答えは６より大きくならないといけいから」。第３の方略は、計算して答えを出すが、その答えは問題の量より小さくなるはずであると考えて、計算をしなおす（Ｍ方略とする）。この方略では２回以上の計算を行う。例えば、第３用法で「$6 \times 0.3 = 1.8$ と答えを出すが、庭の面積が６より小さくなるはずがない。おかしい。$6 \div 0.3 = 20$ を答えにする」。第４の方略は、わり算をして割り切れた数を答えとする（ＤＣ方略とする）。例えば「割ったら割り切れたから」。第５の方略は、計算の方法をきいても答えられない（Ｉ方略とする）。例えば、「何となく解いた」。第６の方略は、図を描いてとく（Ｄ方略とする）。例えば、「図を使ってときました」。第７の方略は、倍数の方法でとく（ＭＵ方略とする）。例えば、第３用法で「30%が６だから、10%は２で、$2 \times 10 = 20$ となった」。

Table 1に、それぞれの問題を上記の７つの方略で解決した子どもの人数を示した。そこでは、７つの方略で解決した子どもの正・誤の人数、それぞれの方略ごとに３問の合計方略数に占める各方略の割合である方略使用率、合計数に占める正答の割合である方略正答率が示してある。

Table 1から見られるように、最もよく使われた頻度の多い方略はＤＣ方略であった。ＤＣ方略は、割り切れるから答えであるというもので、算数の問題の答えはほとんどが割り切れるはずであるというこれまでの経験からくる信念を示すものと考えられる（De Corte, et al., 1996）。２番目に多い方略はＭ方略であった。Ｍ方略は、計算してどうも答えが違うと考えて別の式をたてて計算する方略で、これはメタ認知的な方法で問題を解いていると考えられる。Ｍ方略の子どもの中には、３回や４回も異なる式をたてて計算を繰り返していた。３番目に多いのはＩ方略であった。Ｉ方略は、直感的な演算であり、単に演算過程を言葉で表すだけであった。式の意味を聞いても全く説明できなかった。４番目に多く用いられた方略は公式を使って問題を解決するＵ方略である。小学校で先生が熱心に割合問題を解く際に指導する最も一般的な方法であるにもかかわらず、13%の子どもしか公式を用いていない。多くの子どもは公式で割合を解決していないことは明らかといえる。５番目に利用された方略はＥ方略で、これはある程度答えを予想して、答えに合うような式を立てるという概算によるものである。この方略は割合概念の正確な表象ができていることが考えられる。そのほかにＤ方略やＭＵ方略はかなり少ない。Ｄ方略は図を用いて解いているが、この子どもの中には図を用いてさらに公式で解くという２つの方略を用いていた。ＭＵ方略は少ないが、全体の数の 10%を求めて、それを基に解決する方法である。

次に、それぞれの方略の正答率を見てみる。最も正答率の高いのはＥ方略で 100%正答である。答えの概算を行う方略は割合の正確な表象をもっているといえる。次に正答率の高いのはＵ方略で公式を用いるものである。76%という正答率であり、割合の概念を理解しており、ある程度の有効性をもっていると考えられる。一度計算してから答えがおかしいと思って計算し直すＭ方略も正答率が 41%で、効果的な方略とはいえないが、ある程度は有効な方略である。また、倍数で解くＭＵ方略も正

Table1　問題解決における各方略毎の使用率と正答率

方略の種類	第一用法		第二用法		第三用法		正	誤	方略使用率	方略正答率
	正	誤	正	誤	正	誤				
U	5		3		3	2	11	2	13	76
E	2		3		4		9		9	100
M		4	8	5	3	5	10	14	25	41
DC		15		3	1	7	1	25	26	3
I	1	5	3	6		7	4	18	22	18
D	1					1	1	1	2	50
MU					2	1	2	1	3	66

答率が66％と有効な方法である。こうした方略に対して、ＤＣ方略やＩ方略は正答率がかなり低い。ＤＣ方略やＩ方略は、割合概念を理解しているとはほとんどいえない。

考　察

本研究では、面接において子どもが口に出して考える発話のプロトコル化から、割合の解決の際に用いる方略を分析し、割合概念の困難性の要因について検討することが目的であった。

まず、割合の解決の方略分析から、公式で問題を解決する子どもは13％と極めて少なく、子ども自身が考えた方略で問題を解く子どもが87％とかなり多いことが示された。この結果は、吉田ら（2000）の傾向ともほとんど一致している。学校で、教師は問題を提示し、それから式を立てて解くことを指導している。教師は、いろいろな工夫をして式を覚えさせ、式から割合問題を解決させるというドリル学習に多くの時間をかけている。しかし、本研究から見られるように、教師が指導している公式による解決を約９割にのぼる子どもが行なわないことは明らかである。公式を利用して解決しない子どもが大多数を占めていることから、公式に依存する指導では割合を正しく解決することは困難であると考えられる。公式による指導に多くの学習の時間をついやすという一般的な方法が、割合概念を理解を困難にさせている要因の１つであると考えられる。

また、子どもが多く依存していた方略はＤＣ方略やＩ方略であり、この２つの方略は子ども自身が考えた不適切な方略である。ＤＣ方略は割り切れると答えになるという子どもの誤った信念であり、またＩ方略はなぜそのように解いたかという理由を説明できない直感的な計算である。こうした方略の合計は48％と約５割にも達している。これらの方略では、子どもは問題の表象を内的に構成し、プランを立てることをしていないと考えられる。さらに、これらの方略の正答率は著しく低い。こうした方略に約５割の子どもが依存していることは、割合問題の解決を難しくさせている理由の１つといえよう。

その他の割合の解決方略のなかで、正しい解決に至る方略としてＥ方略やＭ方略が見られた。Ｅ方略は答えを概算するという方略であり、Ｍ方略は計算後にメタ認知を用いる方略である。こうした方略は、ある程度割合概念の表象ができている。これらは、割合の解決を容易にする方略と考えられる。

以上のことから、多くの子どもは公式で割合の問題を解決しているのではなく、多様な方略で問題を解いていることが明らかである。それでは、どうして子どもは教師が指導した公式による解決方略を用いず、他の方略に依存するのであろうか。その理由としては、割合の公式で用いられる要素としての基にする量、比べる量、割合といった割合概念の要素を同定することの困難性が考えられる（栗山,2005;吉田・河野,1999）。吉田・河野（1999）は、要素の同定の再認課題で、第１用法で64％、第２用法で48％、第３用法で36％という正答率であることを報告している。こうした要素の同定の理解では、子どもは式を立てることも難しいと思われる。そのために、多くの子どもは公式による解決に依存せず、多様な方略を用いたことが考えられる。教師が指導しているように、基にする量、比べる量、割合を同定し、それらを公式に入れて問題を解くという方法では、割合概念の学習効率

はあがらないことが示唆される。

それでは、子どもにとって難しい割合概念の理解を促進するにはどうすればいいのであろうか。一つの方向性としては「子どもの論理」を取り入れた視点からの教授介入が考えられる。従来の指導では、「教科の論理」に基づいた指導がほとんどで、インフォーマルな知識としての子どもの論理を基にした介入については考えられてこなかった（栗山，2001；吉田，1999）。

そこで、子どもの論理に基づいた割合の指導について、方略分析で明らかになった点から考えてみる。Ｅ方略やＭ方略でみられた、概算をして解決する方略は教授介入に有効と思われる。Ｅ方略は初めから答えを見積もり、その答えに合うように式をたてる方略であり、熟達した方略であるといえよう。そのために、多くの子どもがすぐにこの方略を用いることは簡単ではないかもしれない。実際にＥ方略の使用率は９％と少ない。しかしＭ方略は25％見られる。このことは、答えをある程度見積もらせるという方略を、授業の中で取り入れていくことは可能であると思われる。Sowder（1992）は、見積もりの利用は問題解決には極めて重要であると述べている。見積もりには、単なる直感でなく割合の表象が構成されていると考えられる。また、ＭＵ方略のように全体の数の10％を求めて、それを基に解決する方法も子ども自ら考案した方略として授業の中で取り入れていくのに有効である。子どもが自ら考案した有効な方略の積極的な使用は、子どもの問題解決を豊かにさせると思われる。

こうした教授介入の提案は、子どものもつ知識や方略に基づいている。現在の数概念の教授におけるカリキュラムは「教科の論理」に基づいたものであり、そこには子どもの知識や思考を重視した「子どもの論理」が全く組み込まれていない。しかし、最近の認知心理学の研究は、数の教授・学習の領域において、子どものインフォーマルな知識をもちいるべきであるという主張がなされている（Carpenter, et al., 1993; De Corte et al.,1996; 栗山，2001）。インフォーマルな方略を取り入れた実践的指導やカリキュラム構成について研究することの重要性を、本研究は示している。

学力低下への対応として、子どものもつ数理解におけるインフォーマルな知識の利用について、さらにいろいろな領域で検討していくことは重要であろう。子どもの数のインフォーマルな知識については、分数、小数、加算、減算などで明らかにされつつあるが、まだ割合やかけ算、わり算、おおよその数、など十分に明らかにされていない領域が多い。そうした領域のインフォーマルな知識を明らかにすることは、「子どもの論理」に基づいたカリキュラム構成や指導方法には欠くことのできないものである。今後の課題として、そうした領域でのさらなる検討が必要である。また、こうした子どもの思考過程を基にした認知心理学の理論の応用は、教育実践へ有効であるばかりでなく、認知心理学の理論化を促進することが考えられる（Bruer, 1993；栗山；2001，栗山，2002）。

引用文献

Bruer,J.T. 1993 Schools for thought: A science of learning in the classroom. Cambridge, MA: The MIT Press.(松田・森　1997　授業がかわる：認知心理学と教育実践が手を結ぶとき　北大路書房)

Carpenter,T.P., Fennema,E., & Romberg, T.A. 1993 Toward a unified discipline of scientific inquiry. In Carpenter, T.P., Fennema,E., & Romberg, T.A. (Eds.), *Rational numbers: An integration of research.* Hilldale,N.J.: Lawrence.

Hiebert,J. 1992 Mathematical, cognitive, and instructional analysis of decimal fractions. In G. Leinhardt, R.Putnam, & R.A. hattrup(Eds), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching.* LEA

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. 1996 Mathematics teaching and learning. In Berliner, D., & Calfee, R.(Eds.), *Handbook of educational psychology.* New York: Macmillan.

刈谷剛彦・志水宏吉・清水睦美・諸田裕子　2002　学力低下の実態に迫る　論座　６月号　42-58.

河野康男・吉田甫　1999　割合を学習する以前の５年生がもつインフォーマルな知識の分析　宮崎大学教育学部教育実践研究指導センター紀要，６，25-38.

栗山和広・吉田甫　2000 小数概念の習得過程に関する発達的研究　九州保健福祉大学研究紀要，1，75-83.

栗山和広　2001　教授・学習の研究　－認知心理学から教育の実践化へ、そして教育実践から認知心理学の理論化に向けて－　教育心理学年報，40，102-111.

栗山和広　2002　幼児・児童における数表象の構造　北大路書房

栗山和広　2004　子どもの数理解における部分－全体スキーマの発達について：整数について　九州保健福祉大学研究紀要　５，35-40.

栗山和広　2005　割合概念における認知的障害　九州保健福祉大学研究紀要，６，35-40.

Nunes,T & Bryant,P. 1996 *Children doing mathematics.*

London : Blackwell.

Resnick,L.B., Nesher,P., Leonard,F., Magone, M., Omanson,S. & Peld,I. 1989 Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 8-27.

Riley, M.S. & Greeno, J.G. 1988 Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. Cognition and Instruction, 5, 49-101.

深海　寛　1985　学習課題の設定に起因する学習の困難性，算数教育，338，13-20.

Singer,R.S., & Resnick,L.B. 1992 Representations of proportional relationships: Are children part-part-or part-whole resoners? Educational Studies in Mathematics, 236, 231-246.

Smith J.P. 1995 Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction,* 13, 3-50.

Smart,J.R. 1980 The teaching of percent problems. *School Scince and Mathematics,* 80,187-192.

Sowder, J.T. M 1992 Making sense of numbers in school mathematics. In Leinhadrt, G., Putam, R., & Harttrup,R.A.(Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching,* Pp.1-52. Hillsdale, NJ: Lawrence.

吉田甫・栗山和広　1991　分数概念の習得過程に関する発達的研究　教育心理学研究，39，382-391.

Yoshida, H., & Kuriyama,K. 1995 Linking meaning of Symbols of fractions to problem situations. *Japanese Psychological Research,* 37, 229-239.

吉田　甫　1999 認知心理学を基にした新しい算数・数学のカリキュラムの研究と開発，日本数学教育学会編，YearBook, 4,109-127．産業図書

吉田甫・河野康男　1999　割合における構成要素の同定の困難性と問題解決　宮崎大学教育文化学部紀要教育科学　1，1-9.

吉田甫・河野康男・横田浩　2000　割合問題の解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決法略の分析，宮崎大学教育文化学部紀要，2，123-133.