J. of Kyushu Univ. of Health and Welfare. **6** : 35～40, 2005

割合概念における認知的障害

栗山　和広

Children's Cognitive Disabilities in Ratio Concepts

Kazuhiro KURIYAMA

Abstract

The purpose of this study was to examine children's difficulty of identifying underlying components in ratio problems. One hundred and forty nine fifth graders solved three problems of ratio concepts. Three ratio word problems composed of the first term of proportion (p = a ÷ b ; p: proportion, a: quantity to be compared, b: base quantity), the second term of proportion (b × p = a), the third term of proportion (b = a ÷ p) .As results, it was very difficult for children to solve correctly the first term of proportion, the second term of proportion, and the third term of proportion. Furthermore, strategies showed that the most frequently selected equation was small number ÷ bigger number in the first term of proportion, in the term of proportion most of children selected division type although the correct equation was multiplication , and in the third term of proportion almost all of children selected multiplication type. These results suggested that children's difficulties of identifying components was one of the main factors related the difficulty of ratio problems.

Key words : ratio problems, difficulties of identifying components ,strategies
キーワード：割合，構成要素の同定の困難性，方略

小学校の算数の中で子どもにとって理解することが困難な概念の１つとして割合があげられる。割合は、小数、分数，比例といった有理数の下位概念の１つであり，中学校で学習する有理数へとつながっていく重要な概念である。しかし，これを理解しにくい概念と考えている子どもは多い。中学生になっても理解することが困難であり，高校生になっても正しく理解しているとはいえない生徒がおり，さらには大学生でも割合の文章題を完全に理解していない生徒がいるということは，さまざまな調査が指摘している。

最近になって，認知心理学的な視点から，小数，分数，比例といった概念に関して，なぜ難しいのかといった研究が多くなされるようになっている。例えば，分数の大小関係の理解の困難性についての研究（Smith, 1995; 吉田・栗山，1991；Yoshida & Kuriyama, 1995）や，小数の大小間関係の理解についての研究（Hiebert, 1992; 栗山・吉田，2000；Resnick et al., 1989）や，比例についての研究（Singer & Resnick, 1992）が行われるようになっている。

こうした認知心理学の研究では，第１に，子どもが日常生活の中でのさまざまな体験をとおして習得した豊かな知識であるインフォーマルな知識に関する研究が行われている。第２に，概念の学習後に，子どものもっている認知的障害は何かについての研究がなされている。

しかし，こうした認知心理学からのアプローチに基づいた割合概念に関する研究は，これまであまり検討され

九州保健福祉大学社会福祉学部臨床福祉学科　〒882-8508　宮崎県延岡市吉野町1714-1
Department of Clinical Welfare Service, School of Social Welfare, Kyushu University of Health and Welfare
1714-1 Yoshino-cho, Nobeoka, Miyazaki Pref., 〒882-8508

てこなかった。これまでの研究では，割合概念を数学的構造性から検討したものがほとんどであった（Nunes & Bryant, 1996; Smart, 1980；深海，1985）。そこでは，実践的な考えや歴史的視点から研究されたもので，心理学的視点から分析したものではなかった。

認知心理学的な視点からの割合概念についての研究としては，最近になって河野・吉田（1999）や吉田・河野（1999）が始めたばかりである。河野・吉田（1999）は，割合を学習する以前の小学４年生と５年生がもつインフォーマルな知識について分析している。材料としては，「%」についての直接経験の程度を調べる問題や，分離量が与えられたときの割合の量を調べる問題（例：40個のおはじきのうちの25%は，いくつでしょう），割引になった%をもとに値段の大小比較ができるか，という形式で出題された。その結果，70%以上の子どもが日常生活の中での割合の基本的な意味を理解しており，さらに割合の量についての問題でも50%以上の子どもが量的な表象を理解していることが示された。このことは，割合を学習する前の子どもでも，割合に関するインフォーマル知識を獲得していることを示唆するものである。

また，吉田・河野（1999）は，割合概念を学習するなかで何が理解の障害になっているかについて検討した。割合は，割合，比べる量，基にする量の３要素から成立しており，割合＝比べる量÷基にする量として公式化されている。これが第１用法とよばれるものである。第２用法と第３用法はこれを変形して得られる。比べる量＝基にする量×割合が第２用法で，基にする量＝比べる量÷割合が第３用法である。彼らは，割合で用いられる要素を子どもが正確に同定することの困難性を示唆した。

さて，本研究では，割合の認知心理学的研究のアプローチの中でも，割合概念の認知障害について検討する。それは，割合の認知障害について心理学的視点から検討した数の認知心理学的研究は極めて少ないからである。

また，吉田・河野（1999）は，割合の認知障害について小学６年生を対象におこなっている。対象にした小学６年生は10か月前に割合単元を学習している。割合単元を学習した直後の５年生を対象にしたものではない。割合を学習した直後の５年生も，６年生と同じような割合の認知障害をもっているのであろうか。そこで，本研究では，割合単元を学習した直後の小学５年生を対象に，小数倍と百分率の変換問題の誤り方略の分析と，割合の３用法である第１用法，第２用法，第３用法の問題を解決する際の誤り方略の分析から，割合の認知障害について検討する。

方　法

被験児　宮崎市近郊の公立小学校の５年生149名が対象者である。彼らは宮崎市近郊の平均的な中流家庭の子どもである。

材料　割合概念を構成するテストの内容は，以下の通りであった。（１）小数を%で表す問題２題，%を小数に表す変換課題の問題が２題，（２）第１用法，第２用法，第３用法の問題がそれぞれ１題であった。

（１）「小数は百分率で，百分率は小数で表しなさい。

①0.24（　　　）　②1.025（　　　）

③18%（　　　）　④106%（　　　）

（２）３用法の問題

①第１用法：「いさむ君の家の中庭は700m²あって，140m²が花だん，残りの560m²がしばふになっています。花だんは，中庭全体のどれだけになるでしょうか。また，しばふは中庭全体のどれだけになりますか。」

②第２用法：「校庭は，全体で3500m²です。全体の25%が運動場です。運動場の面積はいくらですか。」

③第３用法は：「けい子さんの家の食費は64000円でした。これは収入の20%にあたります。けい子さんの家の収入は何円だったでしょうか。」

手続き　テストは，通常の授業時間に算数の練習問題という形で一斉に行われた。テストは，５年生の３学期の終わりにおこなった。テスト終了後，テストの正誤を分析した。誤りについては，一人の子どもの答えについて，２人の評定者が誤り方略の推定を行った。これらの分析終了後に，各クラスの担任教師に分析結果を報告した。

各学年の単元内容は次のようであった。最初に，割合は，１つの量がもう１つの量の何倍になるかを考えて，２つの量の大きさを比べるという定義がなされる。その後，小数倍の割合を求める公式として，割合＝比べる量÷基にする量（第１用法）が指導される。次に，比べる量＝基にする量×割合（第２用法）が指導され，基にする量＝比べる量÷割合（第３用法）が指導された。小数倍の指導の後に，百分率が導入される。百分率はいつでも小数倍に変換できるし，また小数は百分率に変換できることが指導される。そして，百分率としての割合で第１用法，第２用法，第３用法が公式を用いて指導される。

結　果

小数倍と百分率の変換問題と第１用法，第２用法，第３用法の３用法の問題について，誤り方略の分析をおこなった。

小数倍と百分率の変換問題

それぞれの問題の平均正答率は，（問題①0.24（　））で，89%，（問題②（1.025））で72%，（問題③（18%））で91%，（問題④（106%））で84%であった。いずれも70%をこえる正答率である。こうしたルーティン的な割合問題は子どもにとっては容易であるといえる。

次に，問題ごとに子どものもつ方略を分析した。その結果がTable 1に示されている。誤り方略として，主な２つのタイプが見られた。１つは，変換すべき単位が100なのに1000として変換したタイプであった（A1タイプ）（例：1.025を1025%とする）。もう１つは，変換すべき単位が100なのに，10と考えて変換するタイプであった（A2タイプ）（例：1.025を10.25%とする）。その他に，分析不能（B）と解答なし（C）であった。誤り方略で，1.025や106%の問題にのみ，A1タイプやA2タイプが見られる。割合を%で表現する際には，全体を100と見なしてその中で占める割合を表現している。1.025や106%割合の問題では，100%を超えており，100%以上の表現を理解することが子どもには難しいことを示している。

Table 1　変換問題における誤り方略の割合

	問題①	問題②	問題③	問題④
A1	0	.05	0	.05
A2	0	.02	0	.02
B	0	.14	.06	.03
C	.06	.05	.05	.06

３用法の問題

３用法の問題ごとの平均正答率を求めた結果をFigure 1に示した。Figure 1から見られるように，第２用法が60%と最も正答率が高く，次に第１用法が48%で，第３用法が38%と正答率が最も低い。この調査は，割合概念を学習して１ヶ月ほどして実施したものである。割合概念を学習してそれほど日数が経過していないにもかかわらず，最も正答率の高い第２用法の問題でさえも正答率は60%であり，高い正答率とはいえない。第１用法の問題の正答率は48%と５割に満たない。第３用法に至っては４割にも満たない正答率である。このことは，多くの子どもが割合概念の意味を理解することの困難さを示している。

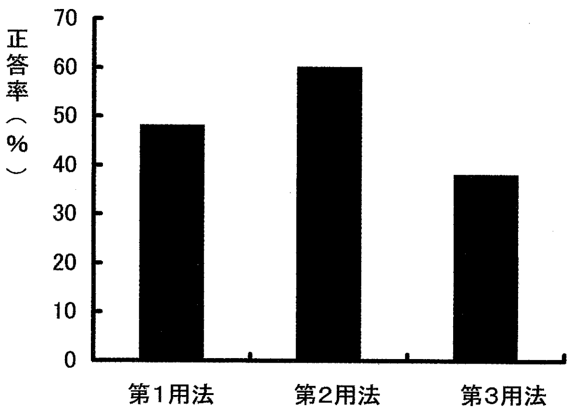

Figure 1　３用法の平均正答率

次に，問題ごとの誤りの分析を行った。誤りの中で興味深い点は，演算の誤りであった。誤って選択されたわり算のタイプ（D1タイプ），誤って選択されたかけ算のタイプ（D2タイプ），誤って選択されたひき算のタイプ（D3タイプ）が見られた。その他に，不注意（Wタイプ），分析不明（Xタイプ），無解答（Nタイプ）が見られた。それぞれの方略を示す人数が，全体の人数に占める割合を求めた。その結果がTable 2に示されている。

Table 2　３用法の誤り方略の割合

	第1用法	第2用法	第3用法
D1	.21	.09	.0
D2	.02	.0	.28
D3	.05	.0	.0
W	.02	.02	.02
X	.08	.10	.20
N	.14	.19	.12

Table 2から，第１用法で最も多く見られた演算の誤りは，わり算の21%であった。正しいわり算は「小さい数÷大きい数である（問題①では140÷700）」であるが，誤りのわり算では「大きい数÷小さい数（問題①では700÷140）」を選択していた。これは子どもにとっての割合が全体を部分に分割することを意味しており，「大きい数÷小さい数」と考えたと思われる。つまり，子どもは自分の既有知識にあった式を選択したといえよう。その結果として「大きい数÷小さい数」という式を選んだと考えられる。その他の誤りの演算としては，かけ算の誤りが２%，ひき算の誤りが５%見られた。ひき算の誤りでは，「大きい数－小さい数」という式を選んだ。第１用法と関連のない演算を選んだ子どもは極めて少ない。

第２用法の演算で見られた誤りは，わり算の９%であった。第２用法ではかけ算で解決されるべきであるが，わり算という別のタイプの演算が選択されている。その

他の演算は選択されなかった。

第3用法では，誤った演算で最も多く見られたのは，かけ算の28%であった。3用法の中の誤った演算で最も多く選択されている。その他の演算は選択されなかった。

考 察

本研究では，子どもの割合概念の認知障害について，変換問題と3用法の問題解決の誤り方略から検討することが目的であった。

変換問題の正答率は，70%を超えており，子どもにとって容易であることが示された。変換問題は意味的な理解を要求するのではなく，%は100を基にし，小数は10を基にするという手続き的知識を習得すれば，容易に解決可能である。これは，ほとんど計算課題と同じといってもいい課題であり，子どもの認知障害がほとんど見られなかった理由であると考えられる。

3用法の問題では，第2用法が最も容易で，次に第1用法で，第3用法が最も難しいという結果であった。本研究で見られた結果は，吉田・河野・横田（2000）の結果とほぼ一致しており，教師の間で一般に考えられていた傾向と同じであった。割合概念を学習して約1ヶ月ほどしか経過していない子どもでも，3用法の割合問題の解決に多くの困難性をもつことが示された。

また，3用法の誤り方略の分析では興味深い誤りが見られた。それは演算の誤りで，第1用法ではかけ算が，第2用法ではわり算が，第3用法ではかけ算が最も多く見られたことである。それぞれの用法で最も多く見られた演算の誤りを見ると，子どもがランダムに演算を選んだのではないことが考えられる。子どもが誤って選んだ式には一貫性が見られるのである。

第1用法で，誤って選択されたわり算である「大きい数÷小さい数」という式の意味としては，次のことが考えられる。わり算とは全体を等分割するという意味をもつものである。「小さい数÷大きい数」という式を選択することは，全体を等分割するという子どもの既有知識に反することになるので選ばれないということになる（吉田，2002）。

第2用法では，なぜわり算が誤って多く選択されるのであろうか。それは，吉田・河野（1999）が指摘しているように，割合の構成要素について正しい同定が子どもにとって困難であることを示唆していると思われる。第2用法は，比べる量＝基にする量×割合という公式である。比べる量を求める問題である。しかし，子どもは基にする量を求める問題と考えていたことが示唆される。基にする量を求めるということは，ある意味では第3用法の「基にする量＝比べる量÷割合」を求めることになる。これはわり算の式を選択するということになる。

第3用法で最も多く選択される演算はかけ算である。第3用法は，基にする量を求める問題である。しかし約3割の子どもは，比べる量を求める問題と誤って理解したことが考えられる。第2用法は比べる量＝基にする量×割合である。それ故に，第2用法を解決するときと同じようにかけ算を選んだことが考えられる（吉田・河野，1999）。

こうした3用法の誤り分析から，割合概念の認知障害が示唆される。1つは，第1用法で示された誤り方略の分析から見られた子どものもつ既有知識の影響である。これは，吉田・栗山（1991）の分数の大小比較や，栗山・吉田（2000）の小数概念の大小比較において見られた結果とも一致している。そこでは，子どもは整数の知識により分数や小数の大小比較を行うことが示されている。既有知識は子どもの数理解にかなり強い影響をもつことが示唆される。もう1つは，第2用法や第3用法の誤り方略の分析から見られた割合概念の構成要素を同定することの困難性である。子どもは比べる量と基にする量を適切に区別することがかなり困難であることが考えられる。

ところで，構成要素である基にする量や比べる量は，部分と全体の視点からもとらえることが可能であろう。比べる量が部分であり，基にする量が全体として考えられる。子どもにとって部分と全体の関係を正確に理解することの難しさは，文章題や分数概念の理解や整数においても示されている。例えば，Cummins（1991）やRiley&Greeno（1988）は，文章題の構造の理解として部分－全体スキーマの重要性を述べている。また，Yoshida & Kuriyama（1995）は，分数概念の理解において，等しい全体スキーマの重要性を述べている。彼らは，分数の大小比較において見られた誤りの中で，分数は全体の部分であり，その部分は同時に全体ともなるという全体の不変性を,子どもはあまり理解していないことを見いだしている。さらに，栗山（2004）は，整数における部分－全体の関係の意味的理解の困難性を示している。

このように，割合概念の理解の障害としての構成要素の同定の困難性は，文章題や分数概念や整数においても示唆されてきた子どもの部分－全体関係の理解の困難性とも軌を一にするものといえよう。

こうした割合概念における認知障害から，割合の指導

について考えてみたい。文章問題の解決において強調されたことは，最初に命題を心的に表現し，表象された内容から解決のプランニングをおこなうことである(Mayer，1992)。しかし，本研究の認知障害から考えると，最初の命題を心的に表現し表象するところで，子どもは適切な表象ができていないことになる。これでは，教師が指導している基にする量と比べる量を同定し公式を用いて割合問題を解決する方法では，子どもの正しい問題解決は困難であるといえよう。

現在の数概念の教授におけるカリキュラムは「教科の論理」に基づいたものであり，そこには子どもの知識や思考を重視した「子どもの論理」が全く組み込まれていない。しかし，最近の認知心理学の研究は，数の教授・学習の領域において，学習中における認知的障害を考慮すべきであるという主張がなされている（Carpenter, et al., 1993; De Corte et al.,1996; 栗山，2001)。本研究における，整数の部分－全体スキーマの理解の困難さからも，整数理解の認知障害が明らかにされた。子どもの数理解における認知障害を取り入れた指導やカリキュラム構成について，今後検討することの重要性を本研究は示している。

今後の課題として，子どものもつ数理解における認知障害について，さらに検討していくことが必要である。子どもの数の認知障害については，分数，小数，加算，減算などで明らかにされつつあるが，まだ割合やかけ算，わり算，おおよその数，など十分に明らかにされていない領域が多い。そうした領域の認知障害を明らかにすることは，「子どもの論理」に基づいたカリキュラム構成や指導方法には欠くことのできないものである。今後の課題として，そうした領域でのさらなる検討が必要である。また，こうした子どもの思考過程を基にした認知心理学の理論の応用は，教育実践へ有効であるばかりでなく，認知心理学の理論化を促進することが考えられる(Bruer, 1993; 栗山, 2001; 栗山，2002)。

引用文献

Bruer,J.T. 1993 *Schools for thought: A science of learning in the classroom.* Cambridge, MA: The MIT Press.（松田・森　1997　授業がかわる：認知　心理学と教育実践が手を結ぶとき　北大路書房）

Carpenter,T.P., Fennema,E., & Romberg, T.A. 1993 Toward a unified discipline of scientific inquiry. In Carpenter, T.P., Fennema,E., & Romberg, T.A.（Eds.），*Rational numbers: An integration of research.* Hilldale,N.J.: Lawrence.

Cummins, D.D. 1991 Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction,* 8, 261-289.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. 1996 Mathematics teaching and learning. In Berliner, D., & Calfee, R.（Eds.），*Handbook of educational psychology.* New York: Macmillan.

河野康男・吉田甫　1999　割合を学習する以前の５年生がもつインフォーマルな知識の分析　宮崎大学教育学部教育実践研究指導センター紀要，６，25-38.

栗山和広・吉田甫　2000小数概念の習得過程に関する発達的研究　九州保健福祉大学研究紀要，１，75-83.

栗山和広　2001　教授・学習の研究　－認知心理学から教育の実践化へ，そして教育実践から認知心理学の理論化に向けて－　教育心理学年報，40，102-111.

栗山和広　2002　幼児・児童における数表象の構造　北大路書房

栗山和広　2004　子どもの数理解における部分－全体スキーマの発達について：整数について　九州保健福祉大学研究紀要，５，35-40.

Mayer,R.E. 1992 *Thinking, problem solving, cognition.* W.H. Freeman, New York.

Nunes,T & Bryant,P. 1996 *Children doing mathematics.* London : Blackwell.

Riley, M.S. & Greeno, J.G. 1988 Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction,* 5, 49-101.

深海　寛　1985　学習課題の設定に起因する学習の困難性，算数教育，338，13-20.

Singer,R.S., & Resnick,L.B. 1992 Representations of proportional relationships: Are children part-part-or part-whole resoners? *Educational Studies in Mathematics,* 236, 231-246.

Smith J.P. 1995 Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction,* 13, 3-50.

Smart,J.R. 1980 The teaching of percent problems. *School Scince and Mathematics,* 80, 187-192.

吉田甫・栗山和広　1991　分数概念の習得過程に関する発達的研究　教育心理学研究，39，382-391.

Yoshida, H., & Kuriyama,K. 1995 Linking meaning of Symbols of fractions to problem situations. *Japanese Psychological Research,* 37, 229-239.

吉田甫・河野康男　1999　割合における構成要素の同定の困難性と問題解決　宮崎大学教育文化学部紀要，

１，1-9.
吉田甫・河野康男・横田浩　2000　割合問題の解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決法略の分析，宮崎大学教育文化学部紀要，２，123-133.
吉田甫　2002　関係の推理と量的推理：割合概念の場合　立命館大学科学研究，４，1-8.