J. of Kyushu Univ. of Health and Welfare. 5 : 35 ~ 40, 2004

子どもの数理解における部分－全体スキーマの発達：整数について

栗 山 和 広

A Developmental Study of the Part-Whole Schema in Children's understanding of Number: The Case of Whole Numbers

Kazuhiro KURIYAMA

Abstract

The purpose of this study was to examine a development of the part-whole schema of whole numbers. One hundred sixty-four second- and one hundred thirty-two third graders were given five problems on both the resolution and composition task. Children were asked to resolve a number into X and Y and Z in the resolution task, and were asked to compose some numbers in the composition task. The results showed that it was not easy for children to solve correctly both the resolution and composition task. Furthermore, the strategies children used indicated that children adopted the procedural strategies more often than the conceptual strategies. These results suggested that children did not understand the conceptual bases for understanding the part-whole schema in whole numbers. Children's interpretation of numbers using the part and whole relationships were discussed in terms of the conceptual and procedural knowledge.

Key Words : whole numbers, part-whole schema, strategies
キーワード：整数，部分－全体スキーマ，方略

認知心理学の研究から，計数，加算，減算，比例，割合，分数，文章題など子どもの数理解に関して，多くのアプローチがなされてきている(Carpenter, et al., 1993; De Corte et al.,1996; Fuson,1988; Gelman & Gallistell,1978; Mack, 1990; Noelting, 1980; Sacker-Grisvard & Leonard, 1985; Resnick & Singer, 1993; Smith, 1995; Cummins, 1991)。そうした数の認知心理学の研究の中でも，本研究の目的は数の部分－全体スキーマについて検討することにある。

これまでの部分－全体スキーマの研究は，文章題や分数概念，割合について多く行われている。Cummins (1991)やRiley & Greeno (1988)は，文章題の構造の理解として部分－全体スキーマの重要性を述べている。例えば，Riley & Greeno (1988) は，「リンゴが6個，りんごとみかんをあわせると8個あります。みかんは何個ありますか」という問題を解決するのに，りんごとみかんの集合が全体であり，りんごとみかんのそれぞれの集合は部分であるという関係の理解が必要であることを指摘している。また，Yoshida & Kuriyama (1995)は，分数概念の理解において，等しい全体スキーマの重要性を述べている．彼らは，分数の大小比較において見られた誤りの中で，分数は全体の部分であり，その部分は同時に全体ともなるという全体の不変性を,子どもはあまり理解していないことを見いだしている．そして，こうした等しい全体スキーマは，公式的なカリキュラムの要素となっておらず，暗黙的な知識となっていたことが考えら

*九州保健福祉大学社会福祉学部臨床福祉学科　〒882-8505　宮崎県延岡市吉野町1714-1
Department of Clinical Welfare Service, School of Social Welfare, Kyushu University of Health and Welfare 1714-1 Yoshino-cho, Nobeoka, Miyazaki, 882-8508 JAPAN

れる．彼らは，そのことが分数概念の理解を困難にさせている要因の一つであると述べている．さらに，割合においても，吉田（2003）は割合概念の理解の困難さの要因として，比べる量と基にする量という概念の中で，部分－全体の関係を理解できないことにあると述べている．こうして，文章題や分数概念や割合概念の理解において，部分－全体スキーマは極めて重要な知識であり，部分－全体スキーマの理解の困難さが認知的障害になっていると考えられる．

このように部分－全体スキーマが，文章題や分数概念や割合概念の理解において重要であることは指摘されてきた．しかし，整数における部分－全体スキーマに関する研究も重要であると考えられる．というのは，子どもは整数の概念を十分に理解しているかという問題が考えられるからである．例えば，吉田・栗山（1990）は，小学2年生から小学3年生にかけて，繰り下がりのあるひき算での正答率は6割程度であり，発達的に変化しないことを見出している．そして，そこでの誤り方略の多くは，十進法性の精緻化した理解がなされていないことを示すものであった．また，栗山・吉田（2000)は，小数の大小比較課題において，小数点以下の桁数が多いほど小数の大きさは大きいという誤りを見いだした．これは，小数概念を整数の知識から理解していることを示すものである．これらのことから，子どもは整数概念を熟知し十分に適用していないことが考えられる．

ところで，整数という概念については，さまざまな側面があるが，整数の基本的な特性としては数の十進法性であるといえよう．そして，整数の十進法性理解において重要なことは，整数を部分－全体にとらえなおすことにある．例えば，521（全体）を例にとれば，これは500と21という部分を合成した全体であるといえる．また，521は500と20と１という部分に分解できる数であるともいえる．このように，整数における部分－全体スキーマは，数の合成や分解に反映されていると考えられる．

さて，整数の部分－全体スキーマに関する研究はこれまでほとんど行われていない．しかしその中でも，栗山（2002）は，就学前の子どもが，10以下の数において５を特異数とする部分－全体スキーマを表象していることを明らかにしている．彼は，数を分解する課題や，加算・減算の方略課題の分析から，幼児は５を特異数とする構造を10以下の数において表象していることを見いだしている．さらに，Verschaffel & De Corte (1996)は，数の十進法性の知識習得には，２進法や４進法といった異なった数システムの理解が重要であると述べている．

また，Resnick (1983)は，十進法性理解の発達という視点から，数の部分－全体スキーマの発達について述べている．そこでは，十進法性は３つの段階に区別されている．第１の段階は，数を１と10に分割できる段階である．例えば，37を10が３つと１が７つと同定できるし，ある数から10をひいたりすることも可能であるし，またブロックの具体物と数とを対応することもできる．第２段階では，数を伝統的でないやり方で分割するだけでなく，２つの10と１つの16とに分割することも可能になる．さらに，分割の方法を変えても，両者は等しいということも理解するようになる．第３段階では，そうした分割を記号のみで処理することが可能となる．

このように，整数の部分－全体スキーマに関する研究は極めて少ない．前述した研究も，整数の部分－全スキーマとしての基本的特性である合成と分解について，児童を対象に実験的に検討したものではない．

そこで，本研究では，児童の整数の部分－全体スキーマを実験的に検討するために，合成と分解課題を用いて検討する．さらに，整数の部分－全体スキーマについて発達的に検討するために，小学2年生から小学3年生を対象とする．本研究では，子どもの用いる方略の違いから，整数の部分－全体スキーマについて検討する．

方　法

被験児　宮崎市内の公立小学校の２年生164名，３年生144名が対象者である．彼らは宮崎市内の平均的な中流家庭の子どもである．

材料　整数の合成課題と分解課題が用いられた．合成課題では，いくつかの数を合成することで得られる数を求める課題であった．分解課題は，合成課題のような繰り上がりの有無はなく，いづれもある数を２つか３つに分解する課題であった．合成課題と分解課題で用いられた問題を以下に示す．

〔合成問題〕

①100を８こ，10を５こ，あわせたかずは（　）です．（繰り上がりなし）

②100を３こ，10を６こ，１を24こあわせたかずは（　）です．（繰り上がり有り）

〔分解問題〕

①38は（　）と（　）と（　）にわけることができます．

②726は（　）と（　）と（　）にわけることができます．

③368は（　）と（　）と（　）にわけることができます.

2年生，3年生とも，合成問題は2問，分解問題は3問であった．尚，3年生での合成問題では，繰り上がりが2回ある問題が用いられた.

手続き　テストは，通常の授業時間に算数の練習問題という形で一斉に行われた．テストは，2年生，3年生とも1学期の終わりにおこなった．テスト終了後，テストの正誤を分析した．誤りについては，一人の子どもの答えについて，2人の評定者が誤り方略の推定を行った．これらの分析終了後に，各クラスの担任教師に分析結果を報告した.

各学年の単元内容は次のようであった．2年生の1学期では，1000までの数について学習し，繰り上がりのたし算について学習していた．また，いくつかの数をあわせる合成問題について「100を7つ，10を18あつめるといくつになるでしょう」という形式での指導が行われていた．分解問題については，「638は100をいくつ，10をいくつ，1をいくつあわせた数です．それでは，321はどうでしょうか」という形式の指導が行われていた．3年生では，万の位までの数について，繰り上がりのあるたし算と繰り下がりのあるひき算について学習していた.

結　果

合成課題と分解課題の各問題について，子どもの用いる方略について分析した.

合成課題

子どもがどのような方略をもっているかについて分析した．（1）正答群：2問とも正答した者．（2）誤り方略群：2問とも一貫して誤った方略に依存した者．(3)混合群：誤り方略の混合した者．（4）その他群：方略として分類できない者.

それぞれの方略を示す人数が，全体の人数に占める割合とその人数を求めた．その結果がTable 1に示されている．2年生の正答群は46%，3年生の正答群は53%で，いずれの学年においても正答群は5割程度であり，合成課題の理解としては十分とはいえない．2年生の1学期から3年生の1学期にかけて，1年間にわたって整数について学習しているにもかかわらず，正答群はわずか7%しか増加していない．逆に誤り方略群は，2年生の11%から3年生では16%へと増加している．このことは，子どもにとって，部分－全体スキーマの理解は学年が進んでもそれほど進まないと考えられる．しかし，これについては別の解釈が可能である．それは，使用された問題のレベルにある．2年生で用いられた1つの問題は繰り上がりがなく，もう1題は1回の繰り上がりのある問題である．しかし，3年生での問題は，2問とも2回の繰り上がりのある問題となっている．同じ合成問題であるが，3年生の問題が難しくなっているので，正答群の割合に変化がなかったという可能性である．これについては，総合的に他のデータもあわせて考える必要があろう.

Table 1　合成課題における各時期の方略群の割合

学年 - 学期	2-1	3-1
正答群	.47(77)	.53(70)
誤り方略群	.11(18)	.16(21)
混合群	.32(52)	.17(22)
その他群	.10(17)	.14(19)

(　)内は人数

次に，Table 1で見られた誤り方略群について分析する．誤り方略群には，3つの一貫した誤り方略が示された．第1のタイプは，数の繰り上がりを全く無視して，数を提示された順に表記する誤りである（C1タイプ）(例：100を3こ，10を6こ，1を24こあわせたかずはの問題で，3624と解答する)．第2のタイプは，上位への繰り上がりを無視して合成する誤りである（C2タイプ）(例：100を3こ，10を6こ，1を24こあわせたかずはの問題で，164と解答する)．第3のタイプは，繰り上がった数を適切に上位に繰り上げない誤りである（C3タイプ）(例：100を8こ，10を13こ，1を16こあわせたかずはの問題で，1の繰り上がりを100の位に繰り上げて1036と解答する)．それぞれの誤り方略を示す人数が，全体の誤り方略群の人数に占める割合について求めた．その結果をTable 2に示した．誤り方略は，大きく分けると，問題の表面的な特性から派生している誤り（C1タイプとC3タイプ）と，概念的な意味から派生している誤り（C2タイプ）の2つになる．Table 2から見られるように，2年生ではC1方略群が88%と最も多く，3年生ではC2方略群が52%と多く見られる．このことから，2年生は表面的な手続き的な特性をもつ誤りが多いが，3年生になると概念的な誤りの方が多くなるといえる．しかし，3年生でもC1方略群とC3方略群をあわせると48%になり，表面的な特性にしたがう誤りをもつ子どもは5割近くになる．このことは，3年生になっても，問題の表面的な特性に従う誤りをもつ子どもが少なくないといえよう.

Table2　分解課題における各時期の方略群の割合

学年‐学期	2-1	3-1
正答群	.45(73)	.56(74)
誤り方略群	.45(74)	.36(47)
混合群	.03(5)	.02(3)
その他群	.07(12)	.06(8)

（ ）内は人数

こうした誤り方略群において見られた誤り方略以外に，４つの誤り方略のタイプが見いだされた．これらの誤りは，表面的な特性に従う誤りであった．C4タイプ：100が3こ，10を6こ，1を24こ合わせた数の問題で，100の位を無視して100として，残りをGH1として扱う．1624と解答する．C5タイプ：1の位を合成するときに1が1個とみなす．C4の問題で361と答える．C6タイプ：10の位を1の位とみなす．100を8こ，10を５こあわせた数の問題で，805と答える．C7タイプ：10の位の個数を無視して合成する．C6タイプの問題で，150と答える．

分解課題

部分－全体スキーマの１つの側面が，数の合成であるとすれば，その裏返しになるのが数の分解である．分解課題において，子どもがどのような方略をもっているかについて以下に分析した．（1）正答群：３問のうち２問を正答した者．（2）誤り方略群：３問のうち２問を一貫して誤った方略に依存した者．(3)混合群：誤り方略の混合した者．（4）その他群：方略として分類できない者．

それぞれの方略を示す人数が，全体の人数に占める割合とその人数を求めた．その結果がTable２に示されている．Table２から見られるように，２年生の正答群は45％，３年生の正答群は56％と，いずれの学年においても正答群は５割程度であり，子どもの約半分は分解課題を理解してない．また，２年生の１学期から３年生の１学期にかけて１年間にわたって整数について学習しているにもかかわらず，正答群は１割増加しただけである．分解課題は，２年生，３年生とも全く同じ問題が使用されたことからすると，数の分解について子どもの理解は進んでいるとはいえないであろう．数の分解課題からも，学年が進むと，子どもの数の部分－全体スキーマの精緻化が進むとはいえない．

Table 3　合成課題における各時期の誤り方略群の割合

学年‐学期	2-1	3-1
C１	.88(16)	.28(6)
C２	.12(2)	.52(11)
C３	0	.19(3)

（ ）内は人数

次に，Table３で見られた誤り方略群について分析する．誤り方略群には，２つの一貫した誤りを示す方略が見られた．第１のタイプは，それぞれの位の数を単に表記しただけの誤りである(R１タイプ)(例：726は,（ ）と（ ）と（ ）にわけることができます．答えが7，2，6となる.)．第２のタイプは，桁の数を位の名前で答える（R２タイプ）(例：368は,（ ）と（ ）と（ ）にわけることができます．答えが，100，10，１となる.)．それぞれの誤り方略を示す人数が，全体の誤り方略群の人数に占める割合について求めた．その結果をTable４に示した．R１タイプ，R２タイプとも表面的な特性から派生した誤りで，合成課題で見られたC１タイプやC３タイプと類似した誤りである．Table３から見られるように，C１方略群が２年生，３年生とも98％である．分解課題では，表面的な特性から派生した誤りでほとんどが占められている．

Table 4　分解課題における各時期の誤り方略群の割合

学年‐学期	2-1	3-1
R１	.98(73)	.98(46)
R２	.02(1)	.02(1)

（ ）内は人数

考　察

本研究では，整数の部分－全体スキーマについて，合成課題と分解課題を用いて，小学２年生と小学３年生を対象に検討した．その結果，合成課題と分解課題のいずれの課題においても，正答群は５割と子どもが十分に理解しているとはいえない結果であった．また，小学２年生から小学３年生にかけて，合成課題と分解課題のいづれにおいても，正答群の増加はわずかしか見られなかった．これらのことから，子どもにとって，整数についての部分と全体の関係といった基本的な知識を理解するこ

とはかなり困難であることが考えられる.

それでは，なぜ整数の合成課題と分解課題の理解は難しいのであろうか．その背景には，数に関する概念的知識と手続き的知識とが統合されないで，分離したままで理解されていることに理由があると思われる．手続き的知識は，形式的な記号の操作についての知識で機械的に学習される知識である．概念的知識は，いくつかの情報を相互に関連づけた意味的な知識である．こうした手続き的知識と概念的知識が結合されないと，個々の情報のネットワークとしての有意味な表象がつくられないことが明らかにされている (Hiebert & Leferve, 1986).

実際の授業で，子どものたし算やひき算の計算でみられる誤りの中には，こうした2つの知識が統合されていないことが見出されている（吉田・栗山，1990）．例えば，3桁のひき算において406－158＝258と解答した子どもは，100を十の位に90，一の位に10を繰り下げるところを，一の位にのみ繰り下げる誤りを行ったと思われる．これは，100を90と10に分解するといった部分－全体スキーマを理解していないことから生じた誤りであると思われる．また，筆算において，上位の位の数から借りてくる数をすべて1とみなして計算を進めている誤りが見られた．まさにこうした誤りが，本研究の合成課題や分解課題で見られた誤り方略と同じであると考えられる．それは，合成課題において，数の繰り上がりを無視して数を提示された順に表記するC1タイプ，繰り上がった数を適切に上位に繰り上げないC2タイプ，分解課題におけるそれぞれの数を単に表記しただけのR1タイプなどである．こうした誤り方略から，子どもは，数の部分－全体スキーマを，数システムの理解と離れた無意味な手続きとして理解していることが考えられる．

また，栗山・吉田（2000）は，整数における部分－全体スキーマの欠如が，小数においても見られることを明らかにしている．彼らは，３年生と４年生を対象に小数の合成課題と分解課題について検討した．その結果，いずれの課題とも，３年生の正答群は５割程度であり，４年生になってもわずかしか増加していないことが示された．このことは，部分－全体スキーマの理解が子どもにとってはかなり困難であることを示唆するものである．さらに，本研究で見出された合成課題における正答群が2年生から3年生にかけても増加していないという結果は，小数概念の合成課題における正答群がほとんど増加していないという結果と同じである．このことは，合成課題の分析のところで先述したように，学年で用いられた課題のレベルの違いということより，部分－全体スキーマの理解の困難さを示唆している．単に学年が上がれば，部分－全体スキーマの知識が精緻化されていくわけではないといえる．

整数における部分－全体スキーマの知識は，当然な前提なので，実際の学校の指導では一応の押さえはなされるている．しかし，これまでは，それらが重要な指導目標としては取り上げられることはなかった．カリキュラムでは，整数の合成や分解といった問題を扱ってはいる．しかし，子どもは整数概念におけるこのもっとも基本的な前提の理解を欠いたまま，加算・減算を学習しているのである．こうした整数概念における部分－全体スキーマの認知障害を克服することが，繰り上がりのある加算や繰り下がりのある減算を理解することの前提となると考えられる．

また，小数や分数や割合の理解の困難さも，整数概念を十分に熟知して柔軟に適用することができないことにあるかのかもしれない．栗山・吉田（2000）は，小数概念における誤りの中に，整数的な知識を背景にしているものが見られることを見いだしている．さらに，吉田・栗山（1991）は，分数概念においても，同様な誤りを見いだしている．これらのことは，整数概念の構造を十分に学習しないことが，小数や分数の理解を困難にさせている一つの要因である可能性を示唆している．

こうした本研究で示されたことから，子どもの数理解において「子どもの論理」を組み込んだ指導の重要性が指摘されよう．現在の数概念の教授におけるカリキュラムは「教科の論理」に基づいたものであり，そこには子どもの知識や思考を重視した「子どもの論理」が全く組み込まれていない．しかし，最近の認知心理学の研究は，数の教授・学習の領域において，学習中における認知的障害を考慮すべきであるという主張がなされている (Carpenter, et al., 1993; De Corte et al.,1996; 栗山，2001 ）．本研究における，整数の部分－全体スキーマの理解の困難さからも，整数理解の認知障害が明らかにされた．子どもの数理解における認知障害を取り入れた指導やカリキュラム構成について，今後検討することの重要性を本研究は示している．

今後の課題として，子どものもつ数理解における認知障害について，さらに検討していくことが必要である．子どもの数の認知障害については，分数，小数，加算，減算などで明らかにされつつあるが，まだ割合やかけ算，わり算，おおよその数，など十分に明らかにされていない領域が多い．そうした領域の認知障害を明らかにすることは，「子どもの論理」に基づいたカリキュラム構成や指導方法には欠くことのできないものである．今後の

課題として，そうした領域でのさらなる検討が必要である．また，こうした子どもの思考過程を基にした認知心理学の理論の応用は，教育実践へ有効であるばかりでなく，認知心理学の理論化を促進することが考えられる(Bruer, 1993; 栗山, 2001).

引用文献

Bruer,J.T. 1993 *Schools for thought: A science of learning in the classroom.* Cambridge, MA: The MIT Press.松田文子・森敏昭(編) 1997 授業がかわる：認知心理学と教育実践が手を結ぶとき 北大路書房

Carpenter,T.P., Fennema,E., & Romberg, T.A. 1993 Toward a unified discipline of scientific inquiry. In Carpenter, T.P., Fennema,E., & Romberg, T.A. (Eds.), *Rational numbers: An integration of research.* Hilldale, N. J. : Lawrence.

Cummins, D.D. 1991 Children's interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction,* **8**, 261-289.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. 1996 Mathematics teaching and learning. In Berliner, D., & Calfee, R.(Eds.), *Handbook of educational psychology.* New York: Macmillan.

Fuson, K. 1988 *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer-verlag.

Gelman,R., & Gallistel,C.R. 1978 *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hiebert J., & Lefevre, P. 1986 Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associaties. Pp.1-23.

栗山和広 2001 教授・学習の研究 －認知心理学から教育の実践化へ，そして教育実践から認知心理学の理論化に向けて－ 教育心理学年報, **40**, 102-111.

栗山和広 2002 幼児・児童における数表象の構造 北大路書房

栗山和広・吉田甫 2000 小数概念の習得過程に関する発達的研究 九州保健福祉大学研究紀要, **1**, 75-83.

Mack, N,K 1990 Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education,* **21**, 16-32.

Noelting,G. 1980 The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part1 defferenciation of strategies. *Educational Studies in Mathematics.* **11**, 217-253.

Resnick, L.B. & Singer,J.A. 1993 Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T.P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg(Eds), *Rational numbers: An integration of research.* Hillsdale, NJ: LEA. Pp. 107-130.

Resnick, L.B. 1983 A development theory of number understanding. In H. P. Ginsburg(Ed.) *The development of mathematical thinking.* Orlando, FL; Academic Press.

Riley, M.S. & Greeno, J.G. 1988 Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction,* **5**, 49-101.

Sacker-Grisvard, C. & Leonard, F. 1985 Intermediate cognitive organization in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers. *Cognition and Instruction.* **2**, 157-174.

Smith J.P. 1995 Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction,* **13**, 3-50.

Verschaffel, L., & De Corte, E. 1996 Number and arithmetic. In A. Bishop(Ed.), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. Pp.1-44.

吉田甫・栗山和広 1990 子どもの数概念の理解の発達 平成2年度科研費報告書

吉田甫・栗山和広 1991 分数概念の習得過程に関する発達的研究 教育心理学研究, **39**, 382-391.

吉田甫 1992 数の発達 吉田甫・栗山和広（編著）教室でどのように教えるかどう学ぶか 北大路書房

Yoshida, H., & Kuriyama,K. 1995 Linking meaning of Symbols of fractions to problem situations. *Japanese Psychological Research,* **37**, 229-239.