割合概念における構成要素の同定

栗山　和広

Children's Difficulty in Identifying Underlying Concepts concerning Ratio Concepts

Kazuhiro KURIYAMA

Abstract

The purpose of this study was to examine whether children who had been instructed on the ratio concepts could properly identify concepts such as a base quantity and a compared quantity. Thirty-three sixth graders of elementary schools were administered three problems of ratio concepts, and were made to identify the correspondence between each quantity and the concept. Results indicated that the percentage of children who could correctly identify three components were 45 % in the first term of proportion, 27 % in the second term of proportion, and 18 % in the third term of proportion, suggesting that the ability of children to compose proportion is poor. Based on the results above, it was suggested that one of the origins for the difficulty in solving ratio word problems is because children cannot correctly identify the components of the ratio concepts.

Key words : ratio concepts, identify, a base quantity, a compared quantity
キーワード：割合概念，同定，基にする量，比べる量

割合は，小数，分数，比例といった有理数の下位概念の１つであり，中学校で学習する有理数へとつながっていく重要な概念である。割合は，割合＝比べる量÷基にする量として公式化されており，これは第１用法と呼ばれている。第２用法と第３用法はこれを変形して得られる。比べる量＝基にする量×割合が第２用法で，基にする量＝比べる量÷割合が第３用法である。しかし，これらを理解しにくい概念と考えている子どもは多い。子どもが，実際に割合の問題をどれぐらい理解しているかについて，栗山（2006）は小学６年生の割合の３用法の正答率を調べている。それによれば，第１用法の正答率は27％，第２用法は57％，第３用法は30％であった。このように，割合を正しく理解している子どもの割合はかなり低い。また，高校生になっても割合の文章問題を正しく理解しているとはいえない生徒がいるということが，さまざまな調査により指摘されているところである。さらに，大学生でも十分に理解しているとはいえないのである。

認知心理学的な視点から，小数，分数，比例といった概念に関しては多くの研究がなされてきている。例えば，小数の大小関係の理解についての研究（Hiebert, 1992; 栗山・吉田，2000；Resnick et al., 1989）や，分数の大小関係の理解の困難性についての研究（Smith, 1995; 吉田・栗山，1991；Yoshida & Kuriyama, 1995）や，比例についての研究(Singer & Resnick, 1992）が行われるようになっている。そこでは，そうした概念の学習中の障害は何かをかなり明らかにしつつある。

このように認知心理学のアプローチから，小数や分数や比例に関する研究は多く見られる。しかし，割合に関する認知心理学の視点からの研究は，これまでほとんど検討されてこなかった。これまでの研究では，割合概念を数学的構造性から検討したものや，実践的な考えや歴史的視点からの研究がほとんどであった（Nunes & Bryant, 1996; Smart, 1980；深海，1985 ）。そこでは，

九州保健福祉大学社会福祉学部臨床福祉学科　〒882-8508　宮崎県延岡市吉野町1714-1
Department of Clinical Welfare Service, School of Social Welfare, Kyushu University of Health and Welfare, 1714-1 Yoshino-cho, Nobeoka, Miyazakii Pref., 〒882-8508

心理学的視点から分析したものではなかった。

認知心理学的な視点からの割合概念についての研究は，河野・吉田（1999）や吉田・河野（1999）や栗山（2005，2006）が検討を行っている。それらの研究の１つのアプローチは，インフォーマルな知識という視点からの分析である。河野・吉田（1999）は，割合を学習する以前の小学４年生と５年生がもつインフォーマルな知識について分析している。材料としては，「％」についての直接経験の程度を調べる問題や，分離量が与えられたときの割合の量を調べる問題，割引になった％をもとに値段の大小比較ができるかという問題が出題された。その結果，７割を超える子どもが日常生活の中での割合の基本的な意味を理解しており，さらに割合の量についての問題でも５割を超える子どもが量的な表象を理解していることが見いだされた。このことは，割合を学習する前の子どもでも，割合に関するインフォーマル知識を獲得していることを示唆している。

別のアプローチは，割合を学習する中で何が理解の障害になっているかについての分析である。栗山（2005）は，割合単元を学習した直後の５年生を対象に，割合の３用法の問題を解決する誤り分析から，割合の理解の障害について検討した。誤りの中で興味深い点は，演算の誤りであった。１つは，割り算における誤りで，「大きい数÷小さい数」を選択した誤りであった。割り算は全体を等分割するという意味をもつことから，全体を等分割するという既有知識が影響することが示唆された。もう１つは，基にする量と比べる量の要素を子どもが正確に同定することが困難であることが示唆された。

また，栗山（2006）は，子どもの発話を求めるプロトコル分析から，子どもが割合の解決において用いる方略を分析した。その結果，子どもは多様な方略で割合の問題を解決していることが明らかにされた。公式を用いて解決する方略，答えをある程度予想して解決する予想方略，メタ認知を用いる方略，直感的方略，割り切れるから答えであるという方略，図で解く方略，倍数の方法で解く方略などが示された。そうした方略の中で興味深い点は，学校で最もよく指導されている公式で解決する子どもが13％と極めて少ないことであった。それでは，どうして子どもは教師が指導した公式による解決方略を用いないのであろうか。その理由としては，割合の公式で用いられる要素としての基にする量，比べる量，割合といった割合概念の要素を正確に同定することが困難であることに原因があることが示唆された。

このように，割合の困難性を研究する際には，いくつかのアプローチが考えられるが，本研究では割合における要素の同定について検討することにある。栗山（2005，2006）は，割合問題が困難である背景には，割合概念で用いられる要素を同定することの困難さに原因があることを示唆している。しかし，そこでは，子どもが割合単元において，比べる量や基にする量を正確に同定できるかどうかについて実証していない。そこで，本研究では，割合で用いられる要素を，子どもがどれほど正確に理解しているかについて検討することが目的である。その際に，本研究では，割合の問題を提示して，問題の構成要素を同定させる再生課題をおこなった。

方　法

被験児　延岡市近郊の公立小学校の６年生33名が，対象者である。彼らは５年生で割合概念を学習して４ヵ月ほど経過している。彼らは延岡市近郊の平均的な中流家庭の子どもである。

材料　割合概念を構成するテストの内容は，以下の通りであった。第１用法，第２用法，第３用法の問題がそれぞれ１題であった。

３用法の問題：これらは５年生の算数の教科書にのっている問題である。

①第１用法：「35人のクラスで７人が宿題をやっていません。宿題をやっていない人は，クラス全体の何％でしょう。」

②第２用法：「40人のクラスのうち，35％が虫歯を持っています。虫歯の人は何人でしょう。」

③第３用法は：「陽子さんの家には，花壇があります。花壇の面積は６㎡です。これは庭全体の30％になります。庭全体の面積は何㎡でしょう。」

手続き　実験は個人面接で行われた。面接は６月に３週間かけて実施された。昼休み時間に，教室から子どもが１人ずつ面接者によって学校内の使われていない教室に連れて来られた。「名前は何ですか。好きな科目は何ですか」といった教示で話しやすい雰囲気をつくった後，子どもに次のような教示を行った「今から割合の問題を解いてもらいます。これはテストではないので，問題を解けても解けない場合でも，心配しないで答えてください。問題を解くさいに，問題の解き方を用紙に記入してください。解き方を消しゴムで消さないでください。」子どもにより問題の提示順序はランダムに変えられた。問題を解いた後に，第１用法，第２用法，第３用法の問題を示して，問題を解く方法について尋ねた。さらに，それぞれの問題で，基にする量，比べる量，割合の要素について尋ねた。「今，問題を解いてもらったけれど，

この問題の中で，基にする量はどれかな。比べる量はどれかな。割合はどれになるかな。」基にする量，比べる量，割合の要素について尋ねる順序はランダムに変えられた。面接者は，子どもが問題を解く様子を全てＶＴＲに録画した。

これらの分析終了後に，各クラスの担任教師に分析結果を報告した。

尚，割合は５年生の３学期に学習する内容で，単元内容は次のようであった。最初に，割合は，１つの量がもう１つの量の何倍になるかを考えて，２つの量の大きさを比べるという定義がなされる。その後，小数倍の割合を求める公式として，割合＝比べる量÷基にする量（第１用法）が指導される。次に，比べる量＝基にする量×割合（第２用法）が指導され，基にする量＝比べる量÷割合（第３用法）が指導された。小数倍の指導の後に，百分率が導入される。百分率はいつでも小数倍に変換できるし，また小数は百分率に変換できることが指導される。そして，百分率としての割合で第１用法，第２用法，第３用法が公式を用いて指導される。

結　果

１．正答率の分析

第２用法の正答率が57％と最も高く，次に第３用法が30％と中間で，第１用法が27％ともっとも低かった。栗山（2005）は，第２用法，第１用法，第３用法と正答率が低下することを見いだした。この傾向と本調査結果とは少し異なるが，第２用法が最もやさしいということとは同じ傾向にある。割合概念を学習して４ヵ月経過すると，最も正答率の高い第２用法の問題でさえも正答率は57％であり，高い正答率とはいえない。第１用法や第３用法の問題の正答率に至っては３割にも満たない極めて低い正答率である。このことは，多くの子どもが割合概念の解決に困難さをもっていることを示している。

２．要素の同定分析

最初に，要素を正しく答えられた子どもの平均の割合を，第１用法，第２用法，第３用法の問題について求めた。

次に，用法の問題毎の誤りの分析をおこなった。誤りの主なパターンは以下のとおりであった。（１）全く要素を答えることができなかったパターン（Aパターン）。（２）基にする量と比べる量を誤って同定するパターン（Bパターン）。（３）比べる量を割合と同定し，割合を比べる量として同定するパターンで，基にする量は正しく同定されている（Cパターン）。（４）比べる量を割合と同定し，基にする量を比べる量として同定するパターン（Dパターン）で，基にする量については答えられない。（５）それぞれの要素の同定のパターンの出現率が５％以下についてはその他とした。用法の問題毎にそれぞれのパターンのタイプの数を求め，それぞれのタイプの割合を求めた。それぞれの誤りのパターンの割合が，図１に示されている。

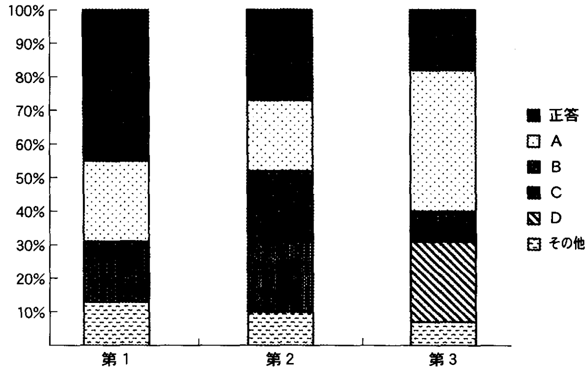

図１　各用法における各パターンの子どもの割合

図１から見られるように，第１用法での要素の同定の正答率は45％で，第２用法は27％で，第３用法では18％という低さである。また，全く要素について答えられない子どもが，第１用法では24％で，第２用法では21％で，第３用法でも42％見られる。子どもは基にする量，比べる量，割合という要素を正確に同定することが困難であるといえる。要素の同定の困難さが，割合の問題の難しさの要因の１つとして考えられる。

次に，同定の誤りについて見ると，第１用法では基にする量と比べる量を誤って同定している子どもが18％と多い。第２用法でも，基にする量と比べる量を誤って同定している子どもが21％も見られる。第３用法では，基にする量と比べる量を誤って同定する子どもは９％見られる。第２用法では，比べる量を求める問題であり，第３用法では基にする量を求める問題である。このことは，第２用法の問題では実際には比べる量を求める問題であるにも関わらず，基にする量を求める問題として解決しようとしていることを示している。また，第３用法の問題では，実際には基にする量を求める問題であるが，比べる量を求める問題として理解している。これでは，子どもが適切に問題を解決することは難しいといえよう。

また，図１から，こうした誤りの他にも，割合として明確に示されている概念を，子どもが基にする量または比べる量として同定している誤りが見られた。第２用法

の問題では，割合を比べる量に誤って同定している子どもが21％見られる。第３用法の問題では，基にする量を割合として同定している子どもが９％，比べる量を割合として誤って同定している子どもが24％見られる。このように，基にする量や比べる量と％としての割合の区別さえつかないことは重要な問題である。この原因は単なる不注意ということではなく，何らかの問題があるとも考えられる。

３．要素の同定の誤りと式について

要素の同定の誤りのパターンと式の選択についてみると，興味深い結果が見られた。図２に各用法における誤答者の演算が全体の子どもに占める割合である選択率を示した。第１用法では，多くの誤答者が選んだ演算は割り算である。これは，大きい数を小さい数で割ることから割り算を選んでいると考えられる。第２用法では，割り算を演算として選んでいる子どもがかなり多い。第２用法は比べる量を求める問題である。しかし，第２用法の問題では，基にする量を求める問題と考えているＢパターンが21％見られた。基にする量を求める問題は第３用法の公式であり，式の選択として割り算を選ぶことが予想される。誤答の式として割り算を選ぶものが多いという結果と一致している。さらに，割合を求める問題と考えるＣパターンも21％見られた。割合を求める式は，第１用法の公式であり，式の選択としては割り算を選ぶことが予想される。誤答の式として割り算を選ぶものが多いという結果を支持している。

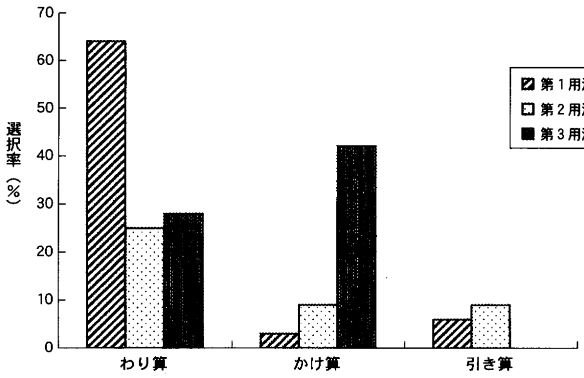

図２　各用法における誤答者の演算の選択率

第３用法は基にする量を求める問題であるが，これを比べる量と考える子どもがＣパターンとＤパターンを合わせると約３割も見られる。比べる量を求める問題は，式の選択としてはかけ算を選ぶことが考えられる。図２から見られるように，誤答の式としてはかけ算を選ぶ子どもが多い。

これらの結果は，基にする量と比べる量を正しく同定できないことが，誤った演算を選択することを示している。

考　察

本研究では，割合概念の要素を子どもが正しく同定できるかについて分析し，割合概念の困難性について検討することが目的であった。

本研究の結果から，基にする量や比べる量を正しく同定できた子どもの割合は，第１用法では45％，第２用法では27％，第３用法では18％と低いことが示された。子どもは，割合問題を解決するには，最初に問題から基にする量，比べる量，割合といった命題を表象することが必要である。しかし，最初の段階で子どもはつまずいているのである。これでは，教師が指導しているように，基にする量，比べる量，割合を同定し，公式に代入するという方法で解決することは困難であるといえよう。これらの結果は，中学校の理科で学習される濃度の問題において見られる，溶媒，溶質，溶液という用語を正しく同定できないという結果と類似している。（黒木・吉田，1998）。本研究の結果は，こうした同定能力の低さが，割合の問題の解決の障害になっていることを示唆している。

また，子どもの誤りの分析において，比べる量と基にする量の同定ができないだけでなく，比べる量や基にする量と割合の区別ができない子どもが第２用法や第３用法で２割程度いることは極めて深刻な問題である。

ところで，栗山（2006）は，割合を学習した６年生が割合をどのように解決するかその方略について分析しところ，公式に従って問題を解決した子どもは１割程度と極めて少なかった。他の多くの子どもは，子ども自ら考案した様々な方略で問題を解決していた。なぜ，子どもは公式に依存しないで子どもが考案した方略で問題を解決したのであろうか。その理由としては，本研究で明らかにされたように，割合の要素を同定することが極めて困難であることによると思われる。このように，本研究の結果は，割合の学習の困難性の要因を明らかにできたといえよう。

こうした割合に対する子どもの理解の実体から，割合の指導としてどういうことが考えられるだろうか。１つには，既に吉田・河野（1999）も指摘しているように，割合で用いられる用語の問題が考えられる。彼らは，子どもの論理に基づいた割合の指導という点から，基にする量や比べる量という用語ではなく，部分と全体という視点を導入することを提案している。全体が基にする量

であり，部分が比べる量としての対応である。部分－全体スキーマは，小学校低学年で獲得される知識であり，子どもにとっては比較的安定した知識である（Riley & Greeno, 1988）。そういう意味において，全体が基にする量であり，部分が比べる量として考えることができるという視点を子どもに導入することは，割合概念の理解の困難さを低下させると考えられる。しかし，割合においては，100％以下の問題状況だけでなく，100％を超える問題状況もある。こうした状況では，部分－全体スキーマで説明することは困難さが伴う。こうした問題点は考えられるが，基にする量と比べる量の説明でなく，部分－全体の説明は，割合概念の理解を容易にすると思われる。これらの視点を導入した指導は，新しいカリキュラム構成や教授介入に重要となることが考えられる。

こうした教授介入の提案は，子どものもつ知識に基づいている。現在の数概念の教授におけるカリキュラムは「教科の論理」に基づいたものであり，そこには子どもの知識や思考を重視した「子どもの論理」が全く組み込まれていない。しかし，最近の認知心理学の研究は，数の教授・学習の領域において，子どもの論理を基にしたカリキュラム構成への転換が主張されてている (Carpenter, et al., 1993; De Corte et al.,1996; 栗山, 2001)。インフォーマルな方略を取り入れた実践的指導やカリキュラム構成について研究することの重要性を，本研究は示している。

こうしたことから，現在問題になっている学力低下への対応の１つが示唆される。そのためには，子どものもつ数理解について，それぞれの教材概念における問題点を明らかにしていくことは重要である。子どもの数のインフォーマルな知識や何が理解の障害になっているかについては，分数，小数，加算，減算などで明らかにされつつあるが，まだ割合やかけ算，わり算，おおよその数，など十分に明らかにされていない領域が多い。そうした領域の問題点を明らかにすることは，「子どもの論理」に基づいたカリキュラム構成や指導方法には欠くことのできないものである。今後の課題として，そうした領域でのさらなる検討が必要である。また，こうした子どもの思考過程を基にした認知心理学の理論の応用は，教育実践へ有効であるばかりでなく，認知心理学の理論化を促進することが考えられる（Bruer, 1993; 栗山, 2001, 栗山, 2002）。

引用文献

Bruer,J.T. 1993 Schools for thought: A science of learning in the classroom. Cambridge, MA: The MIT Press.(松田・森　1997　授業がかわる：認知心理学と教育実践が手を結ぶとき　北大路書房)

Carpenter,T.P., Fennema,E., & Romberg, T.A. 1993 Toward a unified discipline of scientific inquiry. In Carpenter, T.P., Fennema,E., & Romberg, T.A. (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. Hilldale,N.J.: Lawrence.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. 1996 Mathematics teaching and learning. In Berliner, D., & Calfee, R.(Eds.), *Handbook of educational psychology*. New York: Macmillan.

Hiebert,J. 1992 Mathematical, cognitive, and instructional analysis of decimal fractions. In G. Leinhardt, R.Putnam, & R.A. Hattrup(Eds), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. LEA

河野康男・吉田甫　1999　割合を学習する以前の５年生がもつインフォーマルな知識の分析　宮崎大学教育学部教育実践研究指導センター紀要，**6**，25-38.

栗山和広・吉田甫　2000小数概念の習得過程に関する発達的研究　九州保健福祉大学研究紀要，１，75-83.

栗山和広　2001　教授・学習の研究　－認知心理学から教育の実践化へ、そして教育実践から認知心理学の理論化に向けて－　教育心理学年報，**40**，102-111.

栗山和広　2002　幼児・児童における数表象の構造　北大路書房

栗山和広 2004 子どもの数理解における部分－全体スキーマの発達について：整数について．九州保健福祉大学研究紀要，**5**，35-40.

栗山和広 2005 割合概念における認知的障害．九州保健福祉大学研究紀要，６，35-40.

栗山和広 2006 割合の問題解決における方略分析．九州保健福祉大学研究紀要，７，87-92.

黒木亮・吉田甫　1998　子どもの論理をいかした新しい理科授業の創造への試み．宮崎大学教育学部教育実践研究指導センター紀要，５，55-67.

Nunes,T & Bryant,P. 1996 *Children doing mathematics*. London : Blackwell.

Resnick,L.B., Nesher,P., Leonard,F., Magone, M., Omanson,S. & Peld,I. 1989 Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fraction. *Journal for Research in Mathematics Education,* **20**, 8-27.

Riley, M.S. & Greeno, J.G. 1988 Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction,* **5**, 49-101.

深海 寛 1985 学習課題の設定に起因する学習の困難性. 算数教育, **338**, 13-20.

Singer,R.S., & Resnick,L.B. 1992 Representations of proportional relationships: Are children part-part-or part-whole resoners? *Educational Studies in Mathematics,* **236**, 231-246.

Smith J.P. 1995 Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction,* **13**, 3-50.

Smart,J.R. 1980 The teaching of percent problems. *School Scince and Mathematics,* **80**,187-192.

吉田甫・栗山和広 1991 分数概念の習得過程に関する発達的研究. 教育心理学研究, **39**, 382-391.

Yoshida, H., & Kuriyama,K. 1995 Linking meaning of Symbols of fractions to problem situations. *Japanese Psychological Research,* **37**, 229-239.

吉田甫・河野康男 1999 割合における構成要素の同定の困難性と問題解決. 宮崎大学教育文化学部紀要 教育科学, **1**, 1-9.