たし算・ひき算の理解に関する発達的研究

栗山　和広

A Developmental Study on the Understanding of Addition and Subtraction Problems

Kazuhiro KURIYAMA

Abstract

Children's understanding of addition and subtraction problems was developmentally investigated by analyzing strategies used in addition and subtraction problems. One hundred sixty-seven first graders, one hundred sixty-four second graders, and one hundred thirty-four third graders were given addition and subtraction problems. They were classified into three groups according to the strategy they used to solve the problems: a correct response group (over 80 % correct responses), an incorrect strategy group that applied an incorrect strategy to more than two problems, and a group of others that could not be properly classified to the incorrect group. The results were as follows. Among first-year students, the correct response group scored over 80 % for both addition and subtraction problems. In second and third-year students, the correct response group scored 60 % and the incorrect strategy group scored over 20% for subtraction problems. The low proportion of correct response group for subtraction among second and third-graders was due to use of incorrect strategies. These results are discussed in terms of the decimal number system and the structure of numbers.

Key words : addition and subtraction problems, strategies, the decimal number system
キーワード：たし算・ひき算問題，方略分析，十進法システム
2007.11.12受理

子どもの学力低下が進行しているということが社会問題となっている。学力低下について，刈谷ら（2002）は小学生の算数の学力低下が著しいことを示している。本研究では，子どもの数理解について，子どものもつ認知障害をとりあげて考えてみることにする。

子どもの数理解に関する研究は，認知心理学的な視点から，加算・減算，小数，分数，比例，割合といった概念に関して多くの研究がなされてきている。例えば，小数の大小関係の理解についての研究（Hiebert, 1992; 栗山・吉田，2000；Resnick et al., 1989）や，分数の大小関係の理解の困難性についての研究（Smith, 1995; 吉田・栗山，1991；Yoshida & Kuriyama, 1995）や，比例についての研究(Singer & Resnick, 1992）や，割合の学習における方略分析や構成要素の同定の困難性についての研究（吉田・河野，1999；栗山，2005, 2006, 2007）が行われるようになっている。そこでは，そうした概念の学習中の障害は何かをかなり明らかにしつつある。

本研究では，そうした子どもの数理解の中でも，小学校に入学してすぐに学習する整数概念であるたし算とひき算について，認知心理学の視点から検討する。たし算とひき算は，小学校に入学してすぐに学習する概念であるので，その後の算数の学習の興味に影響をあたえる重要な概念である。

たし算とひき算については小学校でフォーマルに学習する概念であるが，就学前の子どももインフォーマルにたし算とひき算を学習していることが明らかになっている。Fuson, Richards, & Briars（1982）は，そのこと

九州保健福祉大学社会福祉学部こども保育福祉学科　〒882-8508　宮崎県延岡市吉野町1714-1
Department of Clinical Welfare Service, School of Social Welfare, Kyushu University of Health and Welfare
1714-1 Yoshino-cho, Nobeoka, Miyazaki Pref, 〒882-8508

を数唱発達のモデルから示している。そのモデルでは，数唱発達は５つの段階から成立している。第１段階は，１からある範囲内の数唱を行うもので，数の言葉が思考の対象となっていない。第２段階は，１から順番に数え上げる数え上げ方略（count-all）が可能になる。この数え方略を用いて子どもはたし算が可能になる。例えば，２つの数の集合をたすために，まず片方の数の集合を数え，次に他方の数の集合を数える。数唱の最後の数がたし算の答えになる。第３段階は，ある数aからある数bまで唱える数えたし方略（count-on）が可能になる。この段階では上昇方向だけでなく下降方向への数唱も可能になる。第４段階では，ある数ａからある数ｂまでの数唱において，いくつかの数があったかを確認できる。第５段階は，数は上昇方向にも下降方向にも自由に数唱が可能となる。こうして，効率的にたし算やひき算が可能になる。これらの方略は，大人が教えた方略ではなく，子どもが日常生活の中で体験をとおして自ら考案した方略である。就学前の子どもも，インフォーマルに獲得した数唱と計数の知識をもってたし算とひき算を解くことが可能であることが考えられる。

小学生の児童はこうしたインフォーマルな知識をもっていることから，１桁のたし算とひき算の解決は容易であることが考えられる。しかし，繰り上がりや繰り下がりがでてくると状況は異なる。Brown & Burton(1978)は，２年生と３年生のうち，２桁の繰り下がりのあるひき算で完全に正答したのは10％にも満たないことを見いだしている。彼らは，２桁の繰り上がりと繰り下がりのあるたし算とひき算の誤りについて分析した。その結果，計算の誤りはランダムな誤りではなく，そこには一貫した誤り方略（バグ）のあることが見いだされた。彼らは，子どもの誤りには，さまざまな手続きの一部が脱落したり，別の手続きに置き換えられたりすることにより，誤った答えが引き出されるという考えを提案した。また，Brown & Van Lehn(1980)は，既有の知識では対応できない問題に出会ったら，それを解くために発見的なルールを採用することを仮定した。このことは，子どもの誤りはでたらめなものではなく，子どもの知識が反映されたものであることを示している。

ところで，たし算とひき算は小学校入学後に１年から３年にかけてフォーマルに学習する概念であるが，これまでの研究は各学年の児童のたし算とひき算の理解について研究されており，理解過程について発達的に検討した研究はほとんど見られない。子どものたし算とひき算の理解について発達的に検討することは，子どもが発達のどの段階で難しさを持っているかが明らかになり，教授・学習の活動を行う上で極めて重要な示唆をあたえると考えられる。

そこで，本研究では，たし算とひき算の理解について，１年生から３年生までの児童が持つ方略について発達的に検討する。その際，子どもの知識が反映されている誤り方略を分析することにより，たし算とひき算の知識の理解過程がどのように進行していくかを明らかにしていく。尚，各学年の子どもについては１年間にわたって同じ子どもを対象として縦断的に追跡していく。

方　法

被験児　宮崎市近郊の公立小学校の１年生167名，２年生164名，３年生139名が対象者である。宮崎市近郊の平均的な中流家庭の子どもである。本研究は，１年生と２年生は１年間にわたる合計３回のテストに全て参加した者が，分析の対象となった。３年生は２回のテストに全て参加した者が分析の対象となった。

材料　たし算とひき算のテストの内容は，以下のとおりである。１年生のテストは，１学期は１桁の数のたし算５題とひき算５題，２学期は１桁のたし算４題と２桁と１桁のひき算４題，３学期は２桁と１桁のたし算５題とひき算５題が出題された。２年生のテストは，１学期は２桁のたし算10題とひき算10題，２学期は３桁と２桁のたし算６題とひき算６題，３学期は３桁，３桁と４桁のたし算５題とひき算５題が出題された。３年生のテストは，１学期は４桁のたし算４題とひき算４題，２学期は４桁のたし算３題とひき算４題が出題された。

手続き　学期が終わる最後の週に，通常の授業時間に算数テストという形式で一斉におこなわれた。３年生は２学期にたし算とひき算の単元の学習が終わるので２回テストを行った。テスト終了後に，一人の子ども毎に方略の推定をおこなった。これらの分析が終わった後，各クラスの担任教師にテストの分析結果についてフィードバックが与えられた。

各学年の単元内容は以下のとおりであった。１年生では，１学期に10までの数の概念が教えられ，その後10までの範囲のたし算とひき算が導入された。２学期は，20までの数の概念が教えられ，１桁の繰り上がりのあるたし算が教えられた。３学期は，100までの数の概念が教えられ，２位数と１位数の繰り上がりと繰り下がりのないたし算とひき算の筆算が教えられた。０を含むたし算とひき算も導入された。

２年生では，１学期に1000までの数の概念が教えられ，２位数と１位数，２位数どうしの繰り上がりと繰り

下がりのあるたし算とひき算の筆算が教えられた。２学期は，３位数と２位数，３位数どうしのたし算とひき算の筆算が教えられた。３学期は，10000までの数の概念が教えられ，３位数どうし，３位数と４位数のたし算とひき算の筆算が教えられた。

３年生では，１学期に10万までの数の概念が教えられ，４桁のたし算とひき算が教えられた。

結　果

たし算とひき算について子どもの理解過程を見るために，３つの方略群に分類した。第１の方略群は，適切な方略を用いて８割以上の正答率を示した正答群である。第２の方略群は，ある誤り方略を異なる２問以上の問題に対して適用している誤り方略群である。誤り方略により一貫して問題を解いている場合である。第３の方略群は，ある誤り方略を１問にしか適用しないか，または誤りとして分類できなかったその他群である。

それぞれの方略をもつ子どもの人数が，各学年における全体の子どもの人数に占める割合について求めた。その結果を，たし算についてはTable１に，ひき算についてはTable２に示した。

Table1　たし算における各方略群の割合

	1年			2年			3年	
	１学期	２学期	３学期	１学期	２学期	３学期	１学期	２学期
正答群	91	95	89	72	79	82	88	82
誤り方略群	0	0	2	17	8	6	1	5
その他群	9	5	9	11	13	12	11	13

Table2　ひき算における各方略群の割合

	1年			2年			3年	
	１学期	２学期	３学期	１学期	２学期	３学期	１学期	２学期
正答群	95	88	85	51	58	65	64	58
誤り方略群	0	3	2	34	23	14	19	26
その他群	5	9	13	15	19	21	17	16

Table１から見られるように，子どもにとってたし算を正しく答えるのは容易であることがわかる。正答群は，１年生では１学期，２学期，３学期とも約９割とかなり高い。２年生は，１学期で正答群が少し落ち込むものの，２学期，３学期は約８割と高く，３年生でも８割以上と高い。誤り方略群についてみると誤り方略をもつ子どもの割合は少ない。誤り方略群は，１年生ではほとんど見られず，２年生の１学期で17％と高いが，２学期で8％，３学期で6％と低くなり，３年生においても１学期で１％，２学期で５％と低い。

次に，Table２から見られるように，ひき算はたし算と異なり，２年生と３年生の子どもにとって正しく答えることは難しいことがわかる。１年生では，正答群は１学期，２学期，３学期のいずれも９割と高い。１年生は，たし算と同様にひき算も正しく解くことは容易であるといえよう。しかし，２年生になると，正答群は１学期は51％，２学期も58％，３学期も65％と低い。３年生になっても，１学期は64％，２学期は58％と低い。２年生と３年生では，正答群は６割前後であり正しく答えることが困難である。こうした正答群の減少とともに，逆に誤り方略群は増加している。２年生の１学期では35％，２学期は23％，３学期は14％見られ，３年生になっても１学期では19％，２学期は26％見られる。２年生と３年生は，誤り方略を持つものが２割から３割もいるのである。

次に，子どもの理解過程について誤り方略から詳細に検討していく。誤り方略群は，ある誤り方略を異なる２問以上の問題に対して適用している誤り方略を示した群である。しかし，実際には，誤り方略群で見られた誤り方略の他に，たし算で８つの誤り方略，ひき算で12の誤り方略がみられた。そこで，最初に，たし算とひき算で見られた全ての誤り方略についてみる。以下に示すA1からA8までが，たし算で見られた全ての誤り方略である。

A1：繰り上がりすべきでないところを繰り上げている（例：30+18=58)。

A2：繰り上がりをすべきところを上位の数に繰り上げていない（例：56+15=61)。

A3：連続して２桁にわたって繰り上がりがあると，その上位の位に２（正確には100）の繰り上がりをする（例：276+485=851)。

A4：上位の位に１（10または100）の繰り上がりをすべきところを２繰り上げている。

A5：表記されている数をそのままたす（例：42＋7=13)。

A6：繰り上がった数を次のたし算に加えずに答えとしてかく（例，37＋45=712)

A7：桁数が違うときに数を左端にそろえて計算する。

A8：０を含むたし算の答えを０とする。

ひき算では，以下に示すS1からS12までの誤り方略がみられた。

S1：引けないときに大きい方の数から引く（例：426－158=332)。

S2：繰り下がったときに，上位の数の繰り下がりを忘れる（例：31－18=23)。

S3：100を十の位に90, 一の位に10を繰り下げるところを, 一の位にのみ繰り下げる（例：406－158＝158)。

S4：ある桁はS3の方略を用いるが, 他の桁は正しく繰り下がりをしている。

S5：連続して2回繰り下がりがあると, 上位の数から2（正確には200）を引いてしまう（例：426－158＝168)。

S6：繰り下がりをすべきでないところを繰り下げる。

S7：ひかれる数が0のときに10借りてくるところを，9とみなして9から引く。

S8：繰り下がるときに繰り下がった10と引かれる数を加えて引くところを10から引いている。

S9：下位の2桁で繰り下がりが必要なときに上位から1回繰り下げるべきところを下位の2番目の桁から1ではなく2を繰りさげる（例：326－129＝187)。

S10：ある桁はS1で, 他の桁は正しい計算をする。

S11：桁の数が違うときに数を左端にそろえて計算する。

S12：0から数を引くときに答えをすべて0とする（例：2700－1654＝1100)。

ところで, 先述したように, 以上示した誤り方略が, 誤り方略群で見られたわけではない。誤り方略の分析では、ある子どもが同じ方略を1問のみに示した場合は, 子どもが一貫した方略をもっているとは考えにくい。そこで, 子どもが誤りを一貫して所持した、2問以上同じ誤り方略を示した子どもの人数について分析を行った。誤り方略をもつ子どもの人数について, たし算はTable3に, ひき算はTable4に示した。

Table3 たし算における誤り方略の人数

	1年			2年			3年	
	1学期	2学期	3学期	1学期	2学期	3学期	1学期	2学期
A1						3		
A2				26	13	7	2	
A3						1		7
A4				1				
A5			2	2				
A6				2				

Table4 ひき算における誤り方略の人数

	1年			2年			3年	
	1学期	2学期	3学期	1学期	2学期	3学期	1学期	2学期
S1		5	3	42	16	3	3	4
S2				15	18	3	2	5
S3					4	8	15	19
S4						2		
S5						2	3	5
S7						2	1	
S8								1
S12								1

Table3から見られるように，1年生ではたし算の誤り方略はほとんど見られない。しかし，2年生になると繰り上がりに関する誤り方略が増加してくる。2年生の1学期では, 上位に繰り上がりすべきところを繰り上げていないA2の誤りが多く見られる。しかし, そうした繰り上がりに関する誤りも, その後はかなり減少してくる。2年の2学期では，1学期の26人から13人へとかなり減少し，3年生では2人しか見られない。3年生の2学期で， 繰り上がりに関するA3方略が7人とわずかに見られるだけである。

次に, Table4から見られるように, ひき算はたし算とは状況が異なっている。1年生は, 引けないときに大きい数から引くというS1方略しか見られない。2年生になると, 1学期ではS1方略を持つ子どもが42人とかなり多く見られる。しかし，2学期になるとS1方略を持つ子どもは16人と少なくなり, 繰り下がりをするときに繰り下がりを忘れて計算するS2方略とS1方略がほぼ同じくらいになってくる。3学期になると, S1方略やS2方略は減少し, S3方略, S4方略, S5方略などの繰り下がりに関する誤りが出現してくる。さらに，3年生になると主な誤り方略となるのがS3方略である。この方略は繰り下がりに関連した複雑な方略である。3年生になってもひき算が子どもにとって難しいのは, 繰り下がりに関する誤りに原因があると考えられる。

考　察

本研究では，1年生から3年生までのたし算とひき算の理解過程について発達的に検討した。そこでは, 子どもがもつ誤り方略から子どもの内的知識について分析を行った。

本研究の方略分析における正答群からみると, たし算は子どもにとって理解しやすい概念であるが, ひき算の概念の理解は難しいことが示された。たし算は，3年間にわたって，8割以上の子どもが正しく問題を解決できる。しかし, ひき算は2年生，3年生になると正しく問題を解決できる子どもが6割前後に減少してくる。それに伴い, 誤り方略群が増加しており, 正答群の減少は子どもが持つ一貫した誤り方略に原因があると考えられる。このように, ひき算の理解は子どもにとって一つの障壁になっていると考えられる。

次に, 子どものたし算とひき算の理解過程について, 誤り方略の分析から考察する。たし算については，2年生から3年生にかけて桁数が2桁から3桁そして4桁と増加していく。しかし, 桁数の増加は子どもにとってあ

まり影響を及ぼしていない。２年生の１学期では繰り上がりをすべきところを上位の数に繰り上げていないA2方略が多く見られるが，それも２学期，３学期と減少し，３年生ではほとんど見られなくなる。３年生の２学期になると，A3方略がわずかに見られるだけである。このように，たし算では一貫した誤り方略をもつ子どもは少ないようである。子どもは，繰り上がりを含むたし算に関しては大きな障害もなく理解していると考えられる。

それに対して，たし算と異なりひき算においては何が難しい要因になっているのであろうか。まず，２年生の１学期の誤り方略について見ると，引けないときに引ける数から引くというS1方略が多く見られた。この方略は，１年生で学習したひき算の知識をそのまま使用したと考えられる。つまり，１年生はひき算の方向性について考えないで，引ける方から引けばよいという知識で問題を正しく解くことができた。そのために，２桁の問題で繰り下がりのある問題に対しても，この知識をそのまま用いたと考えられる。

しかし，S1方略をもつ子どもは２学期になると１学期の半分ほどになり，２年の３学期から３年生にかけてはかなり少なくなる。S1方略はひき算の大きな障害にはなっていないようである。それに変わって，３年生で出現する主な誤りはS3方略である。S3方略は，100を十の位に90，一の位に10を繰り下げるところを，一の位にのみ繰り下げる誤りである。本来は，100を90と10に分解し，それぞれを十と一の位に加えるのが正しい手続きである。こうしたことからすると，S3方略をもつ子どもは，数の十進法制における最も重要な概念的知識が欠如しているといえよう。また，３年生ではS5方略の出現も特徴的である。この方略は，繰り下がりがあるときに上位の位の１（百または千）を下位の位に分解するという知識はあるが，繰り下がりが２回続くと，上位から２を引いてしまう誤り方略である。このS5方略は，繰り下がりにおける十進法制の知識をある程度もっているが，２回繰り下がりがあるとこうした十進法の知識を用いることができなくなると考えられる。ひき算では，桁数の増加とともに繰り下がりに関する誤りが多くなる。そこには，数の十進法システムの理解という最も基本的な概念を子どもは正しく理解していないことが示唆される。

子どもは十進法制の理解が困難であることを，栗山(2004) は整数の合成課題と分解課題からも明らかにしている。合成課題は，「１と23と10が６つではいくつになるでしょう」という課題で，分解課題は「423は（　）と（　）と（　）とにわけることができます」という課題であった。その結果，こうした課題に正しく答えられた子どもは，３年生の１学期で合成課題は67％，分解課題は57％であった。こうした課題で見られた主な誤りは，合成課題では「236」と答え，分解課題では「４,２,３」答える数の表面的な誤りであった。子どもは，数の部分－全体スキーマや十進法制といった数構成の基本的な知識を理解していないことが示唆される。

こうしたことから，たし算やひき算についてどのような教授介入が考えられるであろうか。本研究から，いくつかの情報を相互的に関連づける概念的知識と形式的な記号の操作についての手続き的知識とが統合されず，それらが分離したままで，子どもはたし算やひき算をおこなっていることが示唆される。数の部分と全体スキーマは当然な前提なので，実際の学校の指導で教師は一応の押さえを行っている。それはResnick(1983)も指摘している量と記号の対応という指導である。こうした指導はほとんどの教師が実践している教授方法である。しかし，それは必ずしも効果を上げていないようである。それに対して，Hiebert & Wearne(1992)は，小学１年生のたし算とひき算について概念的教授法を提案している。それは，概念的理解を促進させるためには，図や記号や具体物といったさまざまな教材と量を関連づけ，その教材が道具として利用できるまで練習させ，問題を解くときにも利用できるようにし，解決のための柔軟な方略についてクラス全体で討論するといった原理を用いるものである。この方法は，子どもが積極的に教材を用い，また子ども同士の相互交渉により内的な表象を構成しやすいことが考えられる。多桁の繰り下がりのあるひき算の理解には，桁値の理解を深める概念的教授法を取り入れることが有効と考えられる

こうした教授介入の提案は，子どものもつ知識に基づいている。現在の数概念の教授におけるカリキュラムは「教科の論理」に基づいたものであり，そこには子どもの知識や思考を重視した「子どもの論理」が全く組み込まれていない。しかし，最近の認知心理学の研究は，数の教授・学習の領域において，子どもの論理を基にしたカリキュラム構成への転換が主張されている(Carpenter, et al., 1993; De Corte et al.,1996; 栗山, 2001)。インフォーマルな方略を取り入れた実践的指導やカリキュラム構成について研究することの重要性を，本研究は示している。

以上のことから，現在問題になっている学力低下への対応の１つが示唆される。それは，子どもの数理解について，それぞれの概念における認知的障害を明らかにしていくことである。子どもがもつ数のインフォーマルな知識や何が理解の障害になっているかについては，分数,

小数, 加算, 減算, 割合などで明らかにされつつあるが, まだかけ算, わり算, おおよその数, など十分に明らかにされていない領域が多い。そうした領域の問題点を明らかにすることは, 「子どもの論理」に基づいたカリキュラム構成や指導方法といった実践的介入には欠くことのできないものである。今後の課題として, そうした領域でのさらなる検討が必要である（Bruer, 1993; 栗山, 2001, 栗山, 2002）。

引用文献

Brown, J.S., & Burton, R.R. 1978 Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, **2**, 155-192.

Brown, J.S. & VanLehn, K. 1980 Repair theory: A generative theory of bugs in mathematical skills. *Cognitive Science*, **2**, 155-192.

Bruer,J.T. 1993 *Schools for thought: A science of learning in the classroom*. Cambridge, MA: The MIT Press.(松田・森 1997 授業がかわる：認知心理学と教育実践が手を結ぶとき 北大路書房)

Carpenter,T.P., Fennema,E., & Romberg, T.A. 1993 Toward a unified discipline of scientific inquiry. In Carpenter, T.P., Fennema,E., & Romberg, T.A. (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. Hilldale,N.J.: Lawrence.

Fuson,KC., Richards, J., & Briars, D.J. 1982 The acquisition and an elaboration of the number word sequencs. In C.Brainerd(Ed.), *Children's logical and mathematical cognition: Progress in cognitive development research*. Vol.1. New York: Springer-Verlag. Pp.32-92.

Hiebert, J. 1992 Mathematical, cognitive, and instructional analysis of decimal fractions. In G. Leinhardt, R.Putnam, & R.A. hattrup(Eds), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. LEA

Hiebert, J. & Wearne, D. 1992 Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, **23**, 98-122.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. 1996 Mathematics teaching and learning. In Berliner, D., & Calfee, R.(Eds.), *Handbook of educational psychology*. New York: Macmillan.

刈谷剛彦・志水宏吉・清水睦美・諸田裕子 2002 学力低下の実態に迫る 論座 6月号 42-58.

栗山和広・吉田甫 2000 小数概念の習得過程に関する発達的研究 九州保健福祉大学研究紀要, 1, 75-83.

栗山和広 2001 教授・学習の研究 －認知心理学から教育の実践化へ, そして教育実践から認知心理学の理論化に向けて－ 教育心理学年報, **40**, 102-111.

栗山和広 2002 幼児・児童における数表象の構造 北大路書房

栗山和広 2004 子どもの数理解における部分－全体スキーマの発達について：整数について 九州保健福祉大学研究紀要 **5**, 35-40.

栗山和広 2005 割合概念における認知的障害 九州保健福祉大学研究紀要, 6, 35-40.

栗山和広 2006 割合の問題解決における方略分析 九州保健福祉大学研究紀要, 7, 87-92.

栗山和広 2007 割合概念における構成要素の同定 九州保健福祉大学研究紀要, **8**, 9-14.

Nunes,T & Bryant,P. 1996 *Children doing mathematics*. London : Blackwell.

Resnick, L.B. 1983 A developmental theory of number understanding. In H.P. Ginsburg(Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press. Pp. 109-151.

Resnick,L.B., Nesher,P., Leonard,F., Magone, M., Omanson,S. & Peld,I. 1989 Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20**, 8-27.

Riley, M.S. & Greeno, J.G. 1988 Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, **5**, 49-101.

Singer,R.S., & Resnick,L.B. 1992 Representations of proportional relationships: Are children part-part-or part-whole resoners? *Educational Studies in Mathematics*, **236**, 231-246.

Smith J.P. 1995 Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, **13**, 3-50.

Smart,J.R. 1980 The teaching of percent problems. *School Science and Mathematics*, **80**,187-192.

吉田甫・栗山和広 1991 分数概念の習得過程に関する発達的研究 教育心理学研究, **39**, 382-391.

Yoshida, H., & Kuriyama,K. 1995 Linking meaning of Symbols of fractions to problem situations.

Japanese Psychological Research, 37, 229-239.
吉田甫・河野康男　1999　割合における構成要素の同定の困難性と問題解決　宮崎大学教育文化学部紀要教育科学　1, 1-9.